



# Matematiikan oppiminen: kantalukujärjestelmät ja kielet osana matematiikan opetusta

Emilie Lejeune

Pro gradu -tutkielma  
Helsingin yliopisto  
Matemaattis-luonnontieteellinen  
tiedekunta  
Joulukuu 2019  
Ohjaaja: Juha Oikkonen

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author Emilie Lejeune			
Työn nimi — Arbetets titel — Title  Matematiikan oppiminen: kantalukujärjestelmät ja kielet osana matematiikan opetusta			
Oppiaine — Läroämne — Subject Matematiikka			
Työn laji — Arbetets art — Level Pro gradu -tutkielma	Aika — Datum — Month and year Joulukuu 2019	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages 58 s.	
Tiivistelmä — Referat — Abstract  <p>Tutkielmassa tarkastellaan matematiikan oppimista tutustumalla matematiikan kieleen ja sen historiaan kantalukujärjestelmien ja matemaattisen intuition avulla sekä pohtimalla kielten vaikutusta matematiikan oppimiseen ja kielentämiseen. Kielten kohdalla syvennytään enimmäkseen suomen ja ranskan kieleen sekä kahta tai useampaa kieltä puhuviin oppilaisiin. Kantalukujärjestelmiä ja kieliä tarkastellaan osana matematiikan opetusta sekä yritetään löytää tapoja hyödyntää niitä opetuksessa. Lisäksi kantalukujärjestelmien ja kielten välille etsitään yhteys, jota voisi mahdollisesti myös hyödyntää matematiikan opetuksessa.</p> <p>Tutkielman tutkimusmenetelmä perustuu suurimmaksi osaksi tiedon keruuseen sekä kirjoittajan omaan havainnointiin ja havaintojensa analysointiin. Havaintoja tukevat muut suomalaiset ja ulkomaalaiset tutkimukset ja julkaistut tekstit sekä oppimiseen liittyvät taustateoriat. Useat lähteet lisäävät tutkielman luotettavuutta sekä usein tukevat toisiaan samankaltaisilla sisällöillään. Tutkielman tavoitteena on selvittää kuinka kantalukujärjestelmät ovat vaikuttaneet matematiikan sisältöihin sekä puhtaan matematiikan puolesta että matematiikan kielen puolesta. Tutkimuksessa selvitetään myös kantalukujärjestelmien yhteyttä eri kielten lukusanoihin, josta päästään näiden kielten vaikutukseen matematiikan oppimiseen.</p> <p>Tutkimustulosten perusteella kielten merkitys matematiikan oppimisessa on jokaiselle yksilöllistä lähtökodista riippumatta. Monikielisten keskuudessa kieli ja kielentäminen kuitenkin koetaan usein haasteena, jos opetuskielen ymmärtäminen on heikkoa. On tietenkin ulkomaalaistaustaisia oppilaita, joille uuden kielen oppiminen käy helpommin kuin toisille, jolloin opetuskieli ei välttämättä olekaan haastavin asia matematiikan oppimisessa. Yhteisen kielen puuttuminen voi siis johtaa huonompiin oppimistuloksiin, vaikka oppilas ymmärtäisi matemaattiset asiasisällöt hyvin. On kuitenkin tavallista kohdata sellaisiakin oppilaita, joille opetuskieli on selvää, mutta matemaattiset asiasisällöt ja matematiikan kielentäminen ovat vaikeita. Tästä johtuen matematiikan oppiminen ei ole kenellekään samanlaista, mutta jokaisella on kuitenkin olemassa matemaattinen intuitio, joka mahdollistaa matematiikan ymmärtämisen.</p> <p>Matematiikan oppiminen tai ylipäänsä oppiminen edellyttää kuitenkin muitakin asioita kuin kielentämisen osaamista tai asiasisältöjen hallitsemista. Jokaisella on oma taustansa, joka voi vaikuttaa omaan asenteeseen sekä motivaatioon. Kaikki on kuitenkin lopulta kiinni omasta hyvinvoinnista ja sitä tukevista tekijöistä. Perhe, ystävät, koulu ja sen henkilökunta ovat kaikki osana oppilaan kasvamisessa ja arvojen muotoutumisessa. Oikeanlainen tuki ja turvallisuuden tunne voivat olla ratkaisevia asioita oppilaan menestymisessä.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords matematiikka, oppiminen, kantalukujärjestelmä, kielentäminen, kielitaito			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Matemaattinen intuitio ja kantulukujärjestelmät</b>	<b>6</b>
2.1	Matemaattinen intuitio . . . . .	7
2.2	Kantalukujärjestelmät . . . . .	8
2.2.1	Yleisimmät kantulukujärjestelmät . . . . .	8
2.2.2	Muita kantulukujärjestelmiä . . . . .	11
2.2.3	Muinaiset lukujärjestelmät . . . . .	13
2.3	Pohdintaa: Matemaattinen intuitio ja kantulukujärjestelmät osana matematiikan opetusta . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Matematiikan oppiminen</b>	<b>21</b>
3.1	Mitä oppiminen on? . . . . .	21
3.1.1	Mitä kaikkea voi oppia? . . . . .	22
3.1.2	Oppimisteorioita . . . . .	24
3.1.3	Muistin merkitys oppimisessa . . . . .	25
3.2	Oppimiseen vaikuttavat tekijät . . . . .	26
3.2.1	Ulkopuoliset tekijät . . . . .	26
3.2.2	Sisäiset tekijät . . . . .	29
3.3	Erilaiset oppijat . . . . .	31
3.3.1	Oppimisstrategiat . . . . .	31
3.3.2	Oppijan metakognitiiviset opiskelutaidot . . . . .	34

3.3.3	Oppimisvaikeudet . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Opetuksessa käytetyt kielet</b>	<b>36</b>
4.1	Matematiikan kieli ja kielentäminen . . . . .	37
4.1.1	Matematiikan kieli muualla . . . . .	39
4.1.2	Matematiikan kielentäminen . . . . .	40
4.2	Eri kielten vaikutus matematiikan oppimiseen . . . . .	45
4.2.1	Lukusanat . . . . .	45
4.2.2	Ranskan ja suomen kieli matematiikan oppimisessa . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Pohdinta</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Johtopäätökset</b>	<b>55</b>
6.1	Matemaattisen intuition merkitys . . . . .	55
6.2	Kantalukujärjestelmien merkitys opetuksessa ja kielissä . . . . .	56
6.3	Kielten vaikutus matematiikan oppimisessa; haasteet kielentämisen ja opetuskielen kanssa . . . . .	57
6.3.1	Haasteet kielen kanssa . . . . .	57

# Luku 1

## Johdanto

Jo monta tuhatta vuotta sitten ihminen osasi arvioida lukumääriä ilman minkäänlaista tietoa siitä mitä matematiikka on. Ihminen aloitti näiden vähäisten tietojen perusteella matematiikan maailman luomisen. Eri puolilla maailmaa kehitettiin erilaisia merkintöjä noudattaen erilaisia sääntöjä lukumäärille. Monet säännöt, kuten aikajärjestelmäme, ovat edelleen käytössä jokapäiväisessä elämässämme ja ne ovat vakiintuneet itsestään selviksi asioiksi. Luvuille kehittyi merkintöjen lisäksi sanoja, jotka auttoivat esimerkiksi kaupankäynnin kehittämisessä ja myös matematiikan kehityksessä. Tänä päivänä matematiikka on hyvin kehittynyttä ja sitä opetetaan ympäri maailmaa käyttäen samoja sääntöjä ja symboleja. Suomessa kaikilla lapsilla on velvollisuus samojen matematiikan sisältöjen oppimiseen 15 ikävuoteen asti, mutta oppimisen matkalla voi mahdollisesti kohdata vaikeuksia.

Jokaisesta meistä löytyy kyky oppia matematiikkaa lähtökohdistamme riippumatta. Tämä matemaattinen intuitiomme ohjaa meidän vaistojamme ja loogista päättelyämme (Dehaene 2009). Uusien tietojen omaksuminen vaatii kuitenkin muutakin kuin pelkästään intuitiota. Matemaattisten sisältöjen oppimiseen vaikuttavat muun muassa oppijan sisäiset ja ulkopuoliset tekijät. Sisäisillä tekijöillä tarkoitetaan oppijan kehossa tapahtuvia asioita, kuten ajattelua, tuntemuksia, kasvua, asennetta ja itselleen sopivia oppimistapoja. Ulkopuolisilla tekijöillä tarkoitetaan taas oppijan ympärillä olevia henkilöitä ja asioita, jotka voivat vaikuttaa oppimiseen, kuten muun muassa opettajat, perhe, kaverit, ilmapiiri,

opetuskieli, opetustavat sekä kulttuuri.

Tässä tutkielmassa tarkastelen lukujärjestelmiä ja kieliä matematiikan opetuksessa ja niiden vaikutusta matematiikan oppimiseen. Tutkimuksen tarkoituksena on löytää miten kantalukujärjestelmiä voisi sisällyttää matematiikan opetukseen sekä tarkastella eri kielten merkityksiä matematiikan oppimisessa. Kantalukujärjestelmät ovat kuitenkin koko matematiikan kielen ja asiasisältöjen pohjana, joten se on myös olennainen osa matematiikan kielentämistä sekä opetuskieltä. Kantalukujärjestelmien ja tarkasteleman kielten välinen yhteys ei ole helposti havaittavissa, mutta jos kielten sanoihin ja matematiikan kieleen syvennyy tarpeeksi, yhteys kyllä löytyy. Joissakin kulttuureissakin käytetään edelleen muuta kantalukujärjestelmää kuin tuttua kymmenjärjestelmää. Tutkielma ei valitettavasti keskity näihin kulttuureihin tiedon ja ajan puutteen takia. Lisäksi tutkielmassa perehdytään maahanmuuttajaoppilaiden sekä kaksi- ja monikielisten oppilaiden kohtaamiin haasteisiin kielen kanssa ja sitä kautta myös haasteisiin matematiikan oppimisessa. Tutkielman aiheita lähestytään tutustumalla tunnettuihin ja vähemmän tunnettuihin lukujärjestelmiin ja niiden historiaan, ihmisen matemaattiseen intuitioon, yleisiin oppimiseen vaikuttaviin tekijöihin sekä kielellisiin yksityiskohtiin. Aiheisiin syvennyttään tutkimalla, kuinka nämä seikat ovat yhteydessä matematiikan oppimiseen. Tutkielmassa käytetään paljon aiempia tutkimuksia ja teorioita tukena sekä minun omia henkilökohtaisia kokemuksiani kaksikielisenä oppilaana ja kaksikielisessä koulussa (Helsingin ranskalais-suomalainen koulu) opettavana.

### **Tutkimuskysymykseni ovat seuraavanlaisia:**

1. Miten matemaattista intuitiota voisi liittää opetukseen tai testata?
2. Miten kantalukujärjestelmiä ja niiden historiaa voisi sisällyttää kiinnostavasti opetukseen? Miten kantalukujärjestelmät näkyvät kielissä ja kielentämisessä?
3. Millainen vaikutus eri kielillä on matematiikan oppimiseen, etenkin, jos oppijalla on haasteita yhteisen kielen kanssa?

Tutkielmassani kerron ensin mitä tarkoitetaan matemaattisella intuitiolla ja esittelen maailmassamme tunnettuja lukujärjestelmiä. Näiden tietojen perusteella pohdin kuinka

niitä voisi sisällyttää opetukseen. Toiseksi tarkastelen perusteellisesti matematiikan oppimiseen liittyviä seikkoja, kuten oppimisteorioita ja -strategioita sekä muita tekijöitä, jotta voin sittemmin syventyä kielen merkitykseen matematiikan oppimisessa. Kieliin syvenyn matematiikan kielen ja sen tuoman kielentämisen kautta sekä tarkastelen muutamaa maailmassamme puhuttua kieltä, kuten ranskan ja suomen kieltä, jotka ovat äidinkieliäni. Lopuksi vastattuani tutkimuskysymyksiin tiivistän lopetuskappaleessa tutkielmani pääkohdat, reflektoin työn tekoani ja pohdin tutkielmani luotettavuutta ja mahdollisia jatkotutkimusten aiheita.

Toivon, että tutkielmani tuo lukijalle syventäviä tietoja matematiikan asiasisällöistä, oppimisesta sekä kielten merkityksestä matematiikan oppimisessa opettajan ja oppilaan näkökulmasta. Toivon myös, että tutkielmani mahdollisesti innoittaisi lukijaa perehtymään muidenkin kielten vaikutukseen matematiikan oppimiseen, jotta aiheesta saataisiin lisää tietoa opetuksen kehittämistä varten. Uskon myös, että matemaattiseen intuitioon kannattaisi perehtyä lisää, sillä siitä voisi olla hyötyä oppimisvaikeuksien selvittämisessä tai erilaisten oppijoiden ajattelu- ja toimintatapojen ymmärtämisessä.

## Luku 2

# Matemaattinen intuitio ja kantalukujärjestelmät

Maailmassamme on jo tuhansien vuosien ajan osattu välittää tietoa matematiikasta tai ilmaista lukumääriä. Lukumääriä on matematiikan aikojen alussa osattu havaita ympäröiviä asioita tutkimalla. Myöhemmin ihmisen on pitänyt keksiä lukumäärille sanoja. Tyypillisin tapa laskea on ollut sormia käyttäen. Sormien takia lukusanat keskittyivät kymmeneen ensimmäiseen lukuun, josta kehittyikin yleisin käytetty lukujärjestelmämme, kymmenjärjestelmä. Ennen saatettiin kuitenkin laskea varpaatkin mukaan eli kahdelle kymmenelle ensimmäiselle luvulle on monessa kielessä keksitty omia sanoja. Ettei tarvinnut loputtomiin keksiä jokaiselle luvulle omaa sanaa, on viisaasti monessa kielessä kehitelty luvun 20 jälkeisille luvuille sanat käyttäen lukusanoja yhdestä kymmeneen. (Boyer 1991, 1-3.) Jos ihmiselle olisi kehittynyt vain kolme sormea kumpaankin käteen, voi olla, että luvut menisivätkin kuuden välein. On siis hyvin mahdollista, että evoluutio on vaikuttanut ihmisen tapaan kehittää lukuja. On kuitenkin eri asia kirjoittaa lukusanoja kirjaimin kuin numeroin. Luvuille täytyi siis myös keksiä omat ulkoasut (Boyer 1991, 5-6). Tämä kehittyi eri paikoissa eri tavalla. Arabialaiset numerot 0-9 ovat vakiintuneet yleisimmäksi tavaksi ilmaista lukuja, mutta tutkielmassa tutustutaan muihinkin käytettyihin tapoihin. Viime vuosisadan aikana teknologian kehittyessä on vielä puhumisen ja kirjoittamisen rinnalle kehittynyt koodaaminen yhdeksi matematiikan ilmaisutavaksi.



Matematiikan ilmaiseminen on johtanut erilaisten lukujärjestelmien kehittymiseen ympäri maailmaa. Jotkin järjestelmistä ovat käteviä tietyissä tilanteissa ja toiset taas toisenlaisissa. Esimerkiksi kouluissa käytetään kymmenjärjestelmää, jonka kantalukuna on luku kymmenen, mutta elektronisissa laitteissa käytetäänkin binäärijärjestelmää, jossa kantalukuna on luku kaksi.

## 2.1 Matemaattinen intuitio

Suurin osa matematiikasta käsittelee lukuja ja kirjaimia sekä niihin liittyviä laskutoimituksia. Kaikki perustuu siihen, että lukuja löytyy joka puolelta meidän silmien alta. Itseasiassa kaikkea voi laskea, esimerkiksi usealla maailman eläimellä on kaksi silmää, neljä raajaa ja yksi suu. On pitkään myös osattu havaita suuruuseroja. Esimerkiksi sotatilanteissa täytyi tietää kannattaako jokin paikka vallata vai ei. Tämä tehtiin alun perin vertailemalla vihollisten lukumäärää oman heimon lukumäärään. Asiaa on itse asiassa tutkinut ranskalainen aivoasiantuntija Stanislas Dehaene (2009).

Dehaene on perehtynyt eläinten ja ihmisten käyttäytymiseen ja aivoihin. Hän on tutkinut eläimiä ja vastasyntyneitä ja niiden kapasiteettia ymmärtää matematiikkaa. Hän ei ole itse matemaatikko, mutta hän on tutkinut kolmea aivojen osaa, päälakilohkoa, etuosaloikon kuorta sekä ohimolohkoa, jotka aktivoituvat tilanteissa, joihin liittyy laskemista tai pelkästään lukujen havainnointia. Hänen mukaansa jo vauvanakin ihminen osaa tunnistaa käykö jokin yksinkertainen matemaattinen kaava järkeen vai ei.

Dehaene perehtyi eläintutkimuksissaan muun muassa leijonalauman käyttäytymiseen. Hän seurasi niiden reagoimista kaiuttimista kuuluneisiin leijonien karjaisuihin. Jos leijonat tunnistivat, että eri karjaisuja oli enemmän verrattuna oman lauman leijonien lukumäärään, ne luopuivat reviiristään, mutta jos karjaisuja olikin vähemmän, ne jäivät puolustamaan reviiriään. Leijonat osasivat siis arvioida lukumääriä pelkästään äänistä eli ne todennäköisesti pystyvät havainnoimaan tai vertaamaan lukumääriä myös näköaistillaan. Dehaene kutsuu tätä ilmiötä matemaattiseksi intuitioksi, joka oletetusti löytyy useimmilta maailman olennoilta.

Voidaan ajatella, että matematiikan ihmeellinen maailma on alun perin kehittynyt

matemaattisesta intuitiosta. Ihminen on siten aikojen saatossa päätenyt kehittämään lukumääriä kuvaavia järjestelmiä kirjallisesti, suullisesti ja teknologian avulla.

## 2.2 Kantalukujärjestelmät

Lukujärjestelmällä tarkoitetaan tapaa puhua, merkitä tai ilmaista lukuja noudattaen tiettyä järjestelmää. Kantalukujärjestelmissä on aina tietty kantaluku, jonka avulla voidaan ilmaista muut luvut järjestelmässä. Kantalukujärjestelmiä on siis monia, joista yleisin on kuuluisa kymmenjärjestelmämme. On kuitenkin tilanteita, joissa kymmenjärjestelmä ei ole paras vaihtoehto. Esimerkiksi elektronisilla piireillä binäärijärjestelmä tiedon esitys on täsmällistä ja se koostuu luvuista 0 ja 1. (Lehtinen, 2014.) Toinen mieleeni tullut hyvä esimerkki on tukkimiehen kirjanpito, jossa piirretään viiden viivan ryhmiä. Tukkimiehen kirjanpito kuvaa hyvin niin kutsuttua additiivista merkintää, jossa luku esitetään muiden lukujen ryhminä. Se ei kuitenkaan ole sama asia kuin 5-kantainen kantalukujärjestelmä, koska sillä ei ole kantalukua vaan pelkästään viiden viivan ryhmiä. On olemassa monia muitakin kantalukujärjestelmiä, jotka esittelen seuraavaksi ja joita tarkastelen opetuksen näkökulmasta myöhemmin.

### 2.2.1 Yleisimmät kantalukujärjestelmät

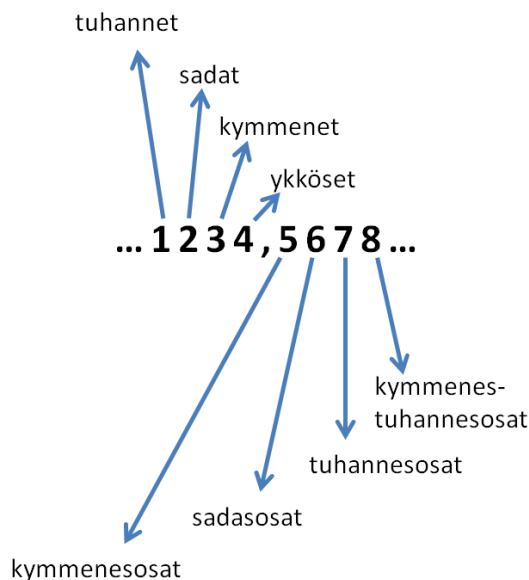
#### Kymmenjärjestelmä

Ihmisellä on siis aina ollut jonkinlaista synnynnäistä ymmärrystä tai intuitiota lukumäärästä, mutta erilaisten lukujärjestelmien syntyminen on aina täytynyt olla peräisin jostain kehitelmästä. Yleisin ja tunnetuin järjestelmä on kymmenjärjestelmä, joka on yksinkertaisesti saanut alkunsa ihmisen sormien lukumäärästä. Varhaiskeskiajan Intiassa esi-isämme käyttivätkin sormia (ja välillä varpaita) havainnollistaakseen lukumääriä esimerkiksi kaupankäynnin yhteydessä. (Lehtinen, 2014.)

Kymmenjärjestelmässä kantalukuna on siis luku 10. Tässä järjestelmässä käytetään lukujen merkitsemiseen arabialaisia numeroita, joissa ensimmäiselle kymmenelle luvulle 0-9 on annettu jokaiselle oma symboli. Näille luvuille on myös annettu omat nimet tai

lukusanat (myös suuremmille luvuille kuten sata, tuhat, miljoona jne). Symboleja yhdistetään tiettyyn järjestykseen, kun halutaan kirjoittaa suurempia lukuja. Samoin tehdään puhutussa kielessä lukusanojen kanssa. Monella kielellä on poikkeuksia lukusanojen joukossa sekä oma tapa ilmaista kymmenyksiä tai esimerkiksi lukuja 10-20 välillä. Näihin perehdytään lisää tutkielman neljännessä osiossa.

Kymmenjärjestelmässä luvuilla on myös oma paikkansa (Kuva 2.1). Kaikki numerot, jotka esiintyvät luvussa voidaan kirjoittaa käyttäen lukua 10. Esimerkiksi luvussa 2145 ( $2000 + 100 + 40 + 5$ ) ensimmäinen luku edustaa tuhansia ( $2000 = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^3$ ), toinen luku satoja ( $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$ ), kolmas luku kymmeniä ( $40 = 4 \cdot 10^1$ ) ja viimeinen luku ykkösiä ( $5 \cdot 10^0$ ). Kymmenjärjestelmän lukujen merkitsemiseen tarvitaan välillä myös pilkkua (joissakin maissa käytetään pistettä), kun ilmaistaan desimaalilukuja. Desimaaliluvun desimaaliosan numerot voidaan myös ilmaista luvun 10 avulla. Esimerkiksi desimaaliluvussa 0,243 ( $0,2 + 0,04 + 0,003$ ) numero 2 edustaa kymmenesosia eli se voitaisiin kirjoittaa muodossa  $\frac{2}{10} = 2 \cdot 10^{-1}$ , numero 4 edustaa sadasosia eli  $\frac{4}{10^2} = 4 \cdot 10^{-2}$  ja numero 3 edustaa tuhannesosia eli  $\frac{3}{10^3} = 3 \cdot 10^{-3}$ .



Kuva 2.1: Paikkajärjestelmä kymmenjärjestelmässä (opinnot.net, viitattu 24.11.2019)

## Binäärijärjestelmä

Kymmenjärjestelmä todennäköisesti nähtiin vielä 1900-luvulla tärkeimpänä lukujärjestelmänä matemaattisissa tilanteissa, mutta nykyään on teknologian kehityttyä yhä enemmän tilanteita, joissa tarvitaan toista hyvin yleistä kantalukujärjestelmää, jota kutsutaan binäärijärjestelmäksi. Binäärijärjestelmän kantaluku on luku 2, johon nimen alku *bi* viittaa. Järjestelmä on mielenkiintoinen, sillä yksinkertaistettuna sen ideana on vain esittää kahta erilaista tilannetta: kyllä vai ei tai esimerkiksi päällä tai pois päältä. Järjestelmässä tarvitaan siis vain kahta lukua (nolla ja yksi) kuvaamaan tapahtumia, mikä tekee binäärijärjestelmästä yksinkertaisimman olemassa olevan kantalukujärjestelmän.

Binäärijärjestelmä noudattaa kymmenjärjestelmän tavoin paikkajärjestystä. Kaikki positiiviset kokonaisluvut voidaan esittää nollilla ja ykkösillä. Luku saadaan laskettua kantaluvun avulla. Esimerkiksi neljän binäärinumeron (bitin) binääriesitys 1011 on

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11.$$

Binäärijärjestelmän yksinkertaisuus helpottaa elektronisten laitteiden suunnittelussa, mutta ykkösistä ja nolista muodostuvista jonoista eli binääriesityksistä tulee valitettavan pitkiä, kun käsittelyssä on suuria lukuja. Siispä on kehitetty kantalukuun 8 ja 16 perustuvia kantalukujärjestelmiä: oktaali- ja heksadesimaalijärjestelmät. (Lehtinen, 2014.) Näitä kahta järjestelmää käytetään useimmiten tietotekniikassa, jossa bittiryhmiä voi ilmaista lyhyemmin. Oktaalijärjestelmässä yksi numero voi ilmaista maksimissaan kolmen bitin ryhmän ja heksadesimaalijärjestelmässä yksi numero voi ilmaista enintään neljän bitin ryhmän.

Oktaalijärjestelmässä on luvut nollasta seitsemään. Esimerkiksi  $156_8$  on

$$1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 110.$$

Oktaalijärjestelmän on lähes kokonaan syrjäyttänyt heksadesimaalijärjestelmä, mutta oktaalilukuja esiintyy edelleen usein ohjelmoinnissa, jossa ne erotetaan muista luvuista laittamalla luvun eteen nolla.

Heksadesimaalijärjestelmässä on luvut nollasta yhdeksään ja lukuja 10-15 merkitään kirjaimilla A-F (Kuva 2.2). Voidaan siis todeta, että oktaalijärjestelmä sisältyy heksadesimaalijärjestelmään. Esimerkiksi  $2AF_{16}$  on

$$2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 256 + 160 + 15 = 431.$$

Heksadesimaalijärjestelmääkin käytetään paljon tietotekniikassa ja ohjelmoinnissa. Sitä käytetään erityisesti väriarvojen merkitsemisen yhteydessä, jossa kuusinumeroinen heksadesimaaliluku ilmoittaa punaisen (R), vihreän (G) ja sinisen (B) värien määrän. Esimerkiksi komento #7700FF ilmoittaa, että punaisen arvo on 77, vihreän 00 (eli ei ollenkaan) ja sinisen FF. Väri olisi siis sinisen ja punaisen värin sekoitus, mutta kuitenkin edelleen selkeästi sininen, sillä sinisen arvo on selkeästi suurempi kuin punaisen. Jos punaisen arvo olisi korkeampi, väri lähestyisi violettia. (Chrisomalis, 2010.)

Desi- maali	Binääri	Heksa- desi- maali	Oktaali
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

Kuva 2.2: Samat luvut voidaan esittää käyttäen eri kantalukua.

## 2.2.2 Muita kantalukujärjestelmiä

### Seksagesimaalijärjestelmä

Seksagesimaalijärjestelmä on kantalukujärjestelmä, jonka kantaluku on 60. Järjestelmää käytettiin jo yli 2000 vuotta ennen ajanlaskua sumerilaisten, akkadilaisten ja babylonialaisten keskuudessa. Luku 60 on monipuolisempi kantaluku lukuun 10 verrattuna. Luvun kymmenen tekijät ovat 1, 2, 5 ja 10, kun taas luvun 60 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ja 60. Seksagesimaalijärjestelmä on kätevä aika-, pituus-, pinta-ala- ja tilavuusyksiköissä sekä karttakoordinaattien ilmaisemisessa. Nykyinen aikajärjestelmä on siis peräisin yli 4000 vuoden takaisesta keksinnöstä, jossa päivä jaettiin 24 tuntiin (Mesopo-

tamiassa alun perin jaettiin päivä vain 12 tuntiin auringon nousun ja laskun perusteella), tunti 60 minuuttiin ja minuutti 60 sekuntiin. (Boyer, 1991.)

## Duodesimaalijärjestelmä

Duodesimaalijärjestelmä on kantalukujärjestelmä, jossa kantalukuna on luku 12. Tätä järjestelmää käytetään edelleen Nigeriassa, Nepalissa, Malediiveilla ja Malikun saarilla ja se näkyy joissakin kielissä, esimerkiksi englannin kielessä luvuissa yksitoista (eleven) ja kaksitoista (twelve), joilla on omat lukusanat. Myös suomen kielessä, kuten monessa muussa kielessä luvulle 12 käytetään arkikielessä sanaa tusina.

Duodesimaalijärjestelmää käytetään pääosin ilmaisemaan ajan yksiköitä: vuodessa on 12 kuukautta, Babyloniassa oli 12 tuntia päiväsaikaa, kiinalaisessa kalenterissa on myös 12 kuukautta, brittien jalan yksikkö on 12 tuumaa ja joissain maissa rahat jaetaan pienempiin 12 joukoissa. Duodesimaalijärjestelmän on mietitty perustuvan ihmisen sormiluihin: ihmisellä on kolme luuta jokaisessa sormessaan (peukaloa ei lasketa tähän mukaan). Luku 12 on myös kätevä murtolukulaskuissa, koska sillä on enemmän tekijöitä (sekä alkutekijöitä) kuin monella muulla järjestelmällä.

Kymmenjärjestelmän lukuja voidaan merkitä duodesimaalijärjestelmän avulla. Lukua 10 merkitään kirjaimella A ja lukua 11 kirjaimella B.

## Vigesimaalijärjestelmä

Vigesimaalijärjestelmä on kantalukujärjestelmä, jonka kantaluku on luku 20. Tämä järjestelmä on kehittynyt suurimmaksi osaksi kaupankäynnin seurauksena, jossa käytettiin sormia sekä varpaita laskemisen tukena. Joissakin kielissä voi olla vielä nykypäivänäkin tästä järjestelmästä jäänteitä. Ranskan kielessä jotkin lukusanat sisältävät matematiikkaa, joissa käytetään lukua 20. Esimerkiksi luku 80 (quatre-vingts) eli *neljä kaksikymmentä* tai luku 90 (quatre-vingt-dix) eli *neljä kaksikymmentä kymmenen* ilmaistaan käyttäen luvun 20 monikertaa. Muissakin kielissä, kuten tanskan, albanian, georgian ja baskin kielissä sekä monessa kelttiläisessä kielessä (bretoni, gaeli ja kymri) löytyy lukusanoissa jäänteitä vigesimaalijärjestelmästä. Muuallakin maailmassa on käytetty vigesimaalijärjestelmää,

kuten joissakin amerikkalaisissa intiaaniheimoissa, japanilaisten ainuiden keskuudessa ja Mayojen sekä Asteekkien lukujärjestelmässä. (Wikipedia, viitattu 1.12.2019.)

### **2.2.3 Muinaiset lukujärjestelmät**

Lukumääriä on siis pitkään tarvittu monessa tilanteessa ja niitä on eri maissa ja kulttuureissa merkitty monella eri tavalla muistiin. Näille muinaisille lukujärjestelmille on usein ominaista lukumääriä kuvaavat symbolit sekä additiivinen merkintätapa eli lukujen ryhmittelytapa. Muinaisten matemaattisten merkintöjen löydöksistä voidaan näiden symbolien ja ryhmien avulla päätellä mitä lukujärjestelmää missäkin on noudatettu. Joissakin maissa tai heimoissa käytetään edelleen joitakin muinaisten lukujärjestelmien merkintä- ja ajattelutapaa.

#### **Egyptiläisten hieroglyfit**

Egyptissä keksittiin jo 3000 vuotta ennen ajanlaskua omat hieraattiset kuviot, jotka noin 2000 vuotta ennen ajanlaskua kehittyivät nykypäivän järjestelmien sääntöjä muistuttaviksi hieroglyfisiksi kuvioiksi. Hieroglyfejä kirjoitettiin papyrukselle, joista on paljon saatu selville egyptiläisten matemaattisista taidoista. Heillä oli luvuille yksi, kymmenen ja sata omat kuviot. Luku 264 merkittiin ilman mitään tiettyä järjestystä siten, että satojen kuvioita oli kaksi, kymmenien kuvioita oli kuusi ja ykkösiä oli neljä. Luvuilla laskeminen keskittyi paljon kymmenpotensseihin ja egyptiläiset käsittelivätkin jo miljoonan suuruksia lukuja. Egyptiläiset laskivat hieroglyfien avulla myös paljon murtolukulaskuja. Murtolukuja he tarvitsivat siementen, hedelmien ja erilaisten nesteiden painojen ja kokojen mittaamiseen. Egyptiläiset olivat jo todella taitavia geometriassa, algebrassa sekä aritmeetiikassa. (Chrisomalis, 2010)

#### **Roomalaiset kirjaimet**

Roomalaiset kirjaimet, joita käytettiin ilmaisemaan lukuja, ovat tänä päivänä tunnetumpia maailmassa kuin egyptiläiset numerot. Roomalaiset käyttivät lähes samaa periaatetta, mutta yksinkertaisimmat luvut, kuten luku yksi merkittiin pystyviivalla eli I-kirjaimella,

luku viisi V-kirjaimella, luku kymmenen X-kirjaimella, luku 50 L-kirjaimella, luku 100 C-kirjaimella, luku 500 D-kirjaimella ja luku 1000 M-kirjaimella. Heillä oli myös tietty paikkajärjestys kirjaimille kuvaamaan eri lukuja, esimerkiksi luku IV on neljä ja luku VI on kuusi.

Roomalaisiin kirjaimiin voi törmätä rakennusvuosien kaiveruksissa esimerkiksi kirkkoissa tai vanhoissa kouluissa tai rakennelmissa, kuten silloissa ja patsaissa. Suomessa käytettiin aikoinaan roomalaisia kirjaimia päivämäärien ilmaisemisessa, mutta nykyään niihin voi törmätä jopa matkalla töihin, ruokakaupoissa tai sairauksien nimissä. Suomen kielen lautakunta käsitteli roomalaisia numeroita vuonna 2005 kokouksessaan, jossa he päättivät, että ilmaukset, joissa roomalainen kirjain toimii substantiivina (ykkönen, kakkonen, kolmonen...) ovat mahdollisia. Esimerkkejä näistä ilmauksista olivat: Kehä I (sekä II ja III), III-olut sekä II-tyypin diabetes. (Kolehmainen, 2005)

## **Mayojen lukujärjestelmä**

Mayoillakin oli omat tapansa merkitä lukuja. Heidän lukujärjestelmänsä perustui vigesimaalijärjestelmään eli 20 -kantalukujärjestelmään. Mayojen lukujärjestelmää voi myös tulkita viisilukujärjestelmänä. He käyttivät lukujen ilmaisemiseen pisteitä, viivoja ja simpukoita (Kuva 2.3). Simpukka kuvasti lukua 0, piste ykköstä tai kymmenystä ja vaakaviiva viitosta. Tyhjä väli tarkoitti uutta kahdenkymmenen numeron sarjaa.

## **Babylonialaiset numerot**

Babylonialaiset kehittivät jo yli 2000 vuotta ennen ajanlaskua oman lukujärjestelmän, joka on jättänyt jälkensä matematiikkaan ja meidän arkielämäämme. Heidän järjestelmänsä pohjautuu sumerien keksimään seksagesimaalijärjestelmään eli 60-järjestelmään, jossa kantalukuna on luku 60. Seksagesimaalijärjestelmällä on alijärjestelmänä kymmenjärjestelmä. Heidän kirjoituksiaan on löydetty vanhoista savitauluista, joissa merkinnät säilyivät paremmin verrattuna haalistuneisiin egyptiläisten papyruspapereihin. Nämä merkinnät ovat osa Mesopotamian asukkaiden kehittämää niin kutsuttua nuolenpäänkirjoitusta. Kuvasta 2.3 nähdään, että babylonialaisten lukujärjestelmässä toistettiin lukua 1 ja 10



vastaavia merkkejä ilmaistakseen luvut 1-59. Babylonialaiset pystyivät ilmaisemaan paikakjärjestelmän avulla desimaalilukuja ja 59:ää suurempia lukuja. Matematiikka kehittyi babylonialaisten keskuudessa kaupankäynnin, rakennusprojektien ja astronomian avulla. Näihin he tarvitsivat peruslaskutoimitustaitojen lisäksi yhtälöiden ratkaisemiseen ja ongelmanratkaisuun tietoja ja osaamista. (Boyer, 1991.)

Babylonialaisten matematiikka on luonut pohjan tiettyihin geometrian osa-alueisiin (esim. ympyrä, Thaleen lause ja Pythagoraan lause (McKirahan 2011)) ja meidän aikajärjestelmäämme. Ei ole löydetty muita heimoja tai kulttuureja, jotka olisivat käyttäneet 60-kantalukujärjestelmää ja siten olisi yhteydessä ympyrän jakamiseen 360 asteeseen tai tunnin jakamiseen 60 minuuttiin ja minuutin 60 sekuntiin. Babylonialaisten käyttämä kantaluku 60 voi nykyään vaikuttaa vaikealta tavalta lähestyä matematiikkaa tai laskemista, mutta heidän lukujärjestelmänsä on lopulta osoittautunut monipuolisemmaksi kymmenjärjestelmäämme verrattuna sen monipuolisen tekijöihin jaon takia. Seksagesimaalijärjestelmä on siis ollut tärkeässä asemassa matematiikan tieteellisessä kehityksessä.

0	1	2	3	4	1	11	21	31	41	51
5	6	7	8	9	2	12	22	32	42	52
10	11	12	13	14	3	13	23	33	43	53
15	16	17	18	19	4	14	24	34	44	54
20	21	22	23	24	5	15	25	35	45	55
25	26	27	28	29	6	16	26	36	46	56
Mayan positional number system					7	17	27	37	47	57
					8	18	28	38	48	58
					9	19	29	39	49	59
					10	20	30	40	50	

Kuva 2.3: Mayojoen numerot 0-29 ja babylonialaiset numerot 1-59 (Wikipedia.org, hakusanat: Mayojoen numerot & Babylonialaiset numerot. Haettu 26.11.2019)

## 2.3 Pohdintaa: Matemaattinen intuitio ja kantalukujärjestelmät osana matematiikan opetusta

Uskon, että intuition ja kantalukujärjestelmien on oltava yhteyksissä toisiinsa. Ovathan lukujärjestelmätkin peräisin jostakin. Ihmiset ovat havainneet, alkaneet tutkia joitakin matemaattisia asioita ja löytäneet mullistavia tapoja esittää ja käsitellä asioita matemaattisesti. Kaikki on täytynyt alkaa matemaattisesta intuitiosta ja siitä, että osaamme jo pienestä pitäen havaita ja vertailla lukumääriä. Tämä taito ei ole mihinkään hävinnyt ja uskon, että jokainen meistä edelleen käyttää omaa matemaattista intuitiota päivittäin missä vain olisi se koulussa, töissä tai aamuruuhkassa.

### Matemaattinen intuitio osana opetusta

Uskon, että matematiikan oppitunneilla oppilaat käyttävät lähes jatkuvasti omaa matemaattista intuitiota, kun he yrittävät ymmärtää uusia asioita, ajattelevat matematiikkaa tai ratkaisevat tehtäviä. Oppilaille syntyy opetuksen ansiosta enemmän matemaattisia tietoja ja taitoja, joiden avulla he voivat uusista tehtävistä selviytyä. He törmäävät väistämättäkin sellaisiin tehtäviin, joissa täytyisi osata soveltaa aiempaa tietämystä. Uskon, että matemaattinen intuitio astuu näissä hetkissä esiin. Sovellustehtävissä tai ongelmanratkaisutehtävissä täytyy päätellä ja löytää oikeat ratkaisutavat. Teoriani on, että matemaattinen intuitio aktivoituu tehtävän aloittamisen yhteydessä, kun täytyy lähteä liikkeelle jostain. Ihmisillä on erilaisia intuitioita elämän muissakin asioissa ja se voi näissä tilanteissa näkyä myös matematiikassa. Joku saattaa ymmärtää saman tehtävän aivan toisella tavalla kuin joku muu ja siten päätyä eri ratkaisuun. Matematiikassa on myös tehtäviä, joita voi ratkaista monella eri tavalla, esimerkkinä voisi olla vaikeammat jakolaskut. Joku saattaisi lähteä ratkaisemaan jakolaskua ajattelemalla ja merkitsemällä sitä murto-lukuna, jossa sitä voisi supistaa tai laventaa, kun taas joku muu voisi lähteä ratkaisemaan jakolaskua allekkain tai jakamalla sitä lukuyksiköittäin vasemmalta oikealle.

Opetukseen voi tuoda lisää matemaattista intuitiota harjoittavia tehtäviä, kuten lukumäärien arviointia tai lukumäärien toisiinsa vertaamista, kuten aiemmat mainitut leijonat tekivät. Opettaja voisi antaa tehtäviä asioista, joita ei ole vielä opeteltu ja joissa oppilaan

täytyisi valita kahden vastauksen väliltä oikea vastaus. Tässä on kuitenkin riskinä se, että oppilaalle jäisi omista päätelmistään väärää tietoa päähän, josta voi olla vaikeaa päästä eroon. Olisi silti mielenkiintoista nähdä miten oppilaiden matemaattinen intuitio toimisi tällaisessa tilanteessa. Intuition testaamista voisi ottaa käyttöön alkutunnista ennen kuin uutta asiaa opitaan. Minusta kaikki lukumäärien arvioinnit tai ylipäänsä tapahtumien tulosten ennakkoinnit voisivat myös olla tapa testata matemaattista intuitiota. Oppilailla olisi hyvä olla lukumäärien arvioinnin taito, koska se näkyisi myöhemmin omien laskujen vastauksien kriittisyydessä. Oppilaat voisivat oppia kyseenalaistamaan omia vastauksiaan eli havaitsemaan onko vastaus tehtävään järkevä vai ei. Uskon, että puhdas matemaattinen intuitio on vahvimmillaan alakoulun ensimmäisillä luokilla, kun ei vielä runsaasti ole opittu matemaattisia sisältöjä.

### **Kantalukujärjestelmät osana opetusta**

Ihminen ei välttämättä tiedosta, että maailmassa olisi olemassa muitakin lukujärjestelmiä, vaikka niitä käyttäisikin joka ikinen päivä. En ainakaan itse asiaa kunnolla tiedostanut ennen tutkielman laatimista. Joitakin asioita pidetään itsestään selvinä, kuten erilaisia elektronisia laitteita, tukkimiehenkirjanpitoa tai sekuntien määrää minuutissa ja minuuttien määrää tunnissa, sillä ne vain on opittu olemaan näin. Minusta olisi tärkeää saada oppilaat tietämään, mistä jotkin itsestään selviksi jääneet asiat ovat peräisin.

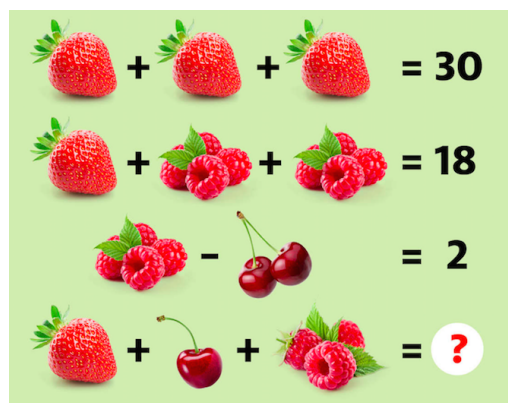
Suomessa opetussuunnitelman mukaan (2016) opetetaan kantalukujärjestelmistä vain kymmenjärjestelmä. Kymmenjärjestelmä onkin olennainen osa ihmisen matemaattista osaamista, sillä ilman sitä olisi vaikeaa oppia perusmatematiikkaa. Kymmenjärjestelmään tutustutaan jo ensimmäisellä luokka-asteella erilaisten pelien ja hahmotelmien avulla. Siihen syvennyttään seuraavilla luokilla enemmän, sillä opituilla luvuilla ruvetaan laskemaan ja oppimaan tiettyjä sääntöjä. Muista järjestelmistä ei mainita vuoden 2016 Opetussuunnitelmassa, mutta tämä ei kuitenkaan poissulje muiden järjestelmien integroimista opetukseen.

Binääri-, oktaali- ja heksadesimaalijärjestelmistä voisi mainita ohjelmoinnin yhteydessä yläkoulun puolella, kun potenssisäännöt ovat jo hallussa. Oppilaille voisi teettää ryh-

mätehtäviä, joissa heidän täytyisi ryhmässä tutkia näiden kolmen järjestelmän sääntöjä ja lukujen käyttäytymistä. Heillä voisi olla tehtävänä verrata joitakin kymmenjärjestelmämme lukuja vastaaviin lukuihin näissä kolmessa muussa järjestelmässä. Oppilaat näin laajentaisivat omaa matemaattista ajattelua ja ehkä ymmärtäisivät paremmin bitteihin liittyviä asioita. Tähän voisi myös liittää värien kirjoittamista luvuin heksadesimaalijärjestelmän mukaan.

Seksagesimaalijärjestelmä on pohjana monelle matematiikan aihealueelle. Opettaja voisi kertoa, mistä aikajärjestelmämme on peräisin ja miltä ajalta. Oppilaiden kanssa voisi miettiä, että olisiko mahdollista muuttaa aikajärjestelmää käyttäen lukua 10 kantalukuna siten, että minuutissa olisi sata sekuntia ja tunnissa sata tuntia? Ja kuinka monta tuntia vuorokaudessa silloin olisi, kun tiedämme, että jokainen päivä on samanpituisen. Oppilaat voisivat myös yrittää selvittää, onko joskus yritetty muuttaa aikajärjestelmää toisenlaiseksi tai käytetäänkö jopa jossakin päin maailmaa toisenlaista systeemiä. Geometrian yhteydessä, kun tutustutaan ympyröihin, oppilaille voisi myös kertoa mistä ympyrän ominaisuudet ovat peräisin ja miten 60-kantainen lukujärjestelmä toimii. Seksagesimaalijärjestelmästä voisi myös mainita seitsemännellä luokalla, kun oppilaat tutustuvat tekijöihin jakoon, että luku 60 on itse asiassa näissä asioissa kätevämpi ja monipuolisempi kuin luku 10. Seksagesimaalijärjestelmän yhteydessä voisi myös mainita duodesimaalijärjestelmästä, joka on perustana meidän päivämme jakamiseen 24 tuntiin.

Vigesimaalijärjestelmä olisi hyvä tiedostaa, kun oppii ranskan kieltä tai muita kieliä, joiden lukusanoihin kyseinen järjestelmä on vaikuttanut. Ranskassa myös arvosanajärjestelmä koulussa perustuu lukuun 20. Siellä arvosana 0/20 vastaa Suomen arvosanaa 4 eli hylättyä, arvosana 10/20 tyydyttävää (7) ja arvosana 20/20 erinomaista (10). Muinaiset lukujärjestelmät voisivat olla myös osana kuvaamataidon opiskelua. Oppilaat voisivat kehittää omanlaisia symboleja ja merkkejä luvuille omavalintaisesta olemassa



Kuva 2.4: Lukuja esittävät hedelmät (yhteishyva.fi, viitattu 1.12.2019)

olevasta kantalukujärjestelmästä.

Roomalaiset kirjaimet tulevat ehkä jo esiin historian tunneilla, mutta nekin ovat hyvä esimerkki eri tavoista ilmaista lukuja. Oppilaat eivät ehkä ole huomanneet, että niitä näkyy edelleen useassa paikassa, kuten tiekylteissä (Kehä I, II ja III). Muinaisia lukujärjestelmien kirjoituksia voisi myös käyttää ongelmanratkaisutilanteissa, joissa oppilaiden täytyisi selvittää erilaisten laskujen avulla mikä merkki tai symboli vastaa mitäkin lukua, kuten kuvassa 2.4 on tehty hedelmien avulla.

Mieleeni tupsahtaa ainakin yksi hyvä tapa saada oppilaat tutustumaan kaikkiin lukujärjestelmiin ja niiden historiaan ja samalla pitää hauskaa. Viime vuosina suosituiksi tulneiden pakohuoneiden ajatusmaailma olisi hauska idea soveltaa lapsille. Tässä ideassa käytettäisiin vain periaatetta, että on tunti aikaa selvittää kaikki huoneessa olevat arvoitukset ja päästä siten 'seuraavalle tasolle'. Arvoituksissa voisi olla sanallisia ongelmanratkaisuja, jotka sisältäisivät vähän historiaa lukujärjestelmistä. Jotta huoneen arvoitukset voitaisiin pakottaa etenemään tietystä järjestyksessä, täytyisi käyttää laatikoita ja erilaisia lukkoja apuna. Lukkojen avaamiseen tarvittaisiin numerosarjoja, jotka ovat peräisin joistakin laskuista tai arvoituksista, jotka täytyisi ratkaista. Uskon, että yleisestikin pakohuoneet avartavat siihen osallistuvien ajatusmaailmaa, voivat opettaa asioista, jotka olisivat muuten opetettuna ehkä vähemmän kiinnostavia, kannustavat toimimaan ryhmässä ja ripeästi sekä kehittävät loogista ajattelukykyä. Kaiken lisäksi oppilailla olisi mitä luultavimmin hauskaa varsinkin, jos he pääsevät ulos huoneesta ja selvittävät kaikki arvoitukset ennätysajassa. Pakohuoneideaa voisi myös kehittää niin, että kaksi ryhmää olisi samaan aikaan kahdessa erillisessä, mutta identtisessä huoneessa ja heidän täytyisi päästä ulos ennen kuin toinen ryhmä pääsee. Kilpailun tuominen mukaan saattaa joitakin oppilaita kuitenkin ahdistaa, mutta toisia taas motivoida. Pakohuoneideaa voisi myös soveltaa sähköiseen muotoon tai muihinkin aihealueisiin, esimerkiksi koekertauksen yhteydessä. Oppilaat voisivat ehkä jopa itse tehdä toiselle osalle ryhmää tai rinnakkaisluokalle oman pakohuoneen.

Jos sähköisten apuvälineiden käyttöä haluaa korostaa, voi oppilaat tehdä ryhmätyön sähköisesti omavalintaisesta lukujärjestelmästä. Kaikista lukujärjestelmistä ei vain löydy helposti tai ylipäänsä paljon tietoa, mikä saattaisi tuottaa ongelmia esitelmän tekemisessä.

Muut lukujärjestelmät kuin kymmenjärjestelmä jäävät myös aihealueena opetussuunnitelman ulkopuolelle, joten näihin asioihin ei voisi liikaa käyttää aikaa, jos niitä haluaa integroida opetukseen. Vaihtoehtona voisi myös käyttää erilaisia pieniä valmiiksi laadittuja tehtäviä lukujärjestelmistä, kun joillakin oppilailla ei enää ole tekemistä (esim. kokeen tehneet oppilaat) tai lisätehtävänä, kun kaikki annetut tehtävät on jo tehty. Nämä toimisivat myös hyvin erityislahjakkaiden oppilaiden tai erityisesti matematiikasta kiinnostuneiden kohdalla.

## Luku 3

# Matematiikan oppiminen

Tässä luvussa tutustutaan tarkasti oppimisteoriaan ja oppimiseen vaikuttaviin tekijöihin. Haluan näin korostaa, että oppiminen ei todellakaan ole pelkästään kielestä kiinni vaan taustalla toimii muitakin tekijöitä, jotka voivat tuoda oppimisprosessiin lisää haasteita tai päinvastoin, helpottaa oppimistilanteita.

### 3.1 Mitä oppiminen on?

Asioiden oppiminen kuuluu kaikkien elämään. Jokainen voi iästään riippumatta päivittäin kokea oppimista. Oppiminen tarkoittaaakin kykyä omaksua ja muistaa uusia asioita. Sitä voi tapahtua tietenkin tietoisesti, mutta myös tahattomasti. Asioita voidaan oppia nopeasti lyhyessäkin ajassa tai joihinkin asioihin voi mennä lähes koko elämä. Oppia voi eri tavoilla ja usein jokaisella meistä onkin oma paras tapa oppia. Oppimiseen vaikuttaa myös elämän eri vaiheet, ympäristö ja ihmiset ympärillä. Loppukädessä jokainen säätelee omaa oppimistaan ja itsensä kehittämistä. Oppimiseen täytyykin suhtautua positiivisesti, jotta se onnistuisi kunnolla. (Sajaniemi ym. 2015.)

Matematiikalla on suuri vaikutus ihmisten elämään ja siksi sillä on ja tulee aina olemaan suuri rooli kouluopetuksessa. Sen osaaminen voi helpottaa lapsia ja nuoria heidän tulevaisuudessaan. Sitä tarvitsee jokapäiväisessä elämässä jo pienissä asioissa, kuten nopeasti suoritettavissa yksinkertaisissa päässä-laskuissa esimerkiksi ruokakaupoissa

tai monimutkaisimmissa asioissa, kuten oman budjetin laskemiseen. Koulussa matematiikan oppiminen voi hankaloitua ylemmillä luokilla, jos matemaattiset taidot ovat jääneet heikoiksi ensimmäisillä luokilla. Matematiikan oppimiseen vaikuttaa siis moni tekijä ja matematiikan oppimisvaikeuksien taustalla voi olla aikaisemmista tiedoista ja taidoista, kielellisistä heikkouksista tai kulttuurisista eroista johtuvia ymmärtämisvaikeuksia (Adler 2001, Saario 2009). Matematiikan oppiminen edellyttää siis paljon oikeanlaista ja sinnikästä harjottelua.

### **3.1.1 Mitä kaikkea voi oppia?**

Opittavia asioita voi karkeasti jakaa erilaisiin kategorioihin: kognitiivisiin tietoihin ja taitoihin, motorisiin taitoihin, sosiaalisiin vuorovaikutustaitoihin ja hallintakeinoihin sekä mielen toimintoihin.

#### **Kognitiiviset tiedot ja taidot**

Ihmisen kognitiivisilla taidoilla tarkoitetaan tiedonkäsittelytaitoja ympäröivästä maailmasta ja itsestään. Näin kehittyvät kognitiiviset tiedot voivat olla täysin uusia asioita tai ne voivat korjata edellisiä tietoja. Jotta ihminen voi käsitellä tietoa ja oppia uutta, hän tarvitsee asioiden käsittelyyn kielen (puhe- ja lukutaidot tärkeitä) sekä muistiaan. Ihminen voi siten luoda sisäisiä malleja mielikuvituksellaan ja harjaannuttaa omia tietämyksiään. (Joutsenlahti, 2005)

#### **Motoriset taidot**

Motorisilla taidoilla tarkoitetaan ihmisen taitoja liikkua ja käyttää kehoaan. Nämä taidot kehittyvät paremmin varhaislapsuudessa. Lapset usein oppivat kontrolloimaan kehoaan uusien asioiden opettelussa nopeammin kuin aikuiset. Motorisia taitoja voi oppia monella tavalla. Lapset oppivat motorisia taitoja usein tahattomasti pelien ja leikkien yhteydessä. Lapsi voi myös tietoenkin kehittää motorisia taitojaan tietoisesti esimerkiksi jossain urheilulajissa. Tällöin tapahtuu usein ohjauksen lisäksi paljon mallioppimista, kun lapsi seuraa



urheilulajinsa huippu-urheilijoita. Lapsen motoriset taidot voivatkin olla jo kymmenvuotiaana aivan huippuluokkaa. (Kauranen, 2011.)

## **Sosiaaliset tilanteet**

Ihmisen vuorovaikutustaidot ja sosiaalisten tilanteiden hallintakeinot kehittyvät läpi elämän. Ympäröivät lähimmäiset vaikuttavat paljon siihen, kuinka itse oppii käyttäytymään muiden ihmisten ilmoilla ja kuinka reagoi erilaisissa tilanteissa. Väistämättäkin epäonnistumiset ja negatiivisluonteiset suhteet voivat muovata ihmiselle huonon itsetunnon ja heikot vuorovaikutustaidot. Hyvillä vuorovaikutustaidoilla tarkoitetaan kykyä sopeutua tilanteisiin, tulla toimeen erilaisten ihmisten kanssa, hallita omia tunteitaan ja ymmärtää muita ihmisiä. Eri tilanteissa täytyy osata hallita itseään, mikä voi olla välillä vaikeaa kohdatessaan itselleen epämiellyttäviä ihmisiä, jolloin ihminen tuppaa punnitsemaan mahdollisia seurauksia ja pelkää menettävänsä jotain. (Klemola ym. 2014.)

## **Mielen toiminnot**

Ihminen oppii elämänsä aikana mielen toimintoja, kuten asenteiden, motiivien ja tunteiden hallintaa. Jo lapsi oppii eri tilanteissa, kuinka asioihin pitäisi suhtautua, miten johonkin toimintaan voi vaikuttaa ja miltä eri tilanteet voivat tuntua. Näin lapsi voikin oppia tuntemaan pelkoa tilanteissa, joiden ei pitäisi olla pelottavia, kuten matematiikan oppitunneilla vastaamalla väärin tai olemalla väärässä koko luokan edessä. Mieli on hyvin vahva tekijä oppimistilanteissa. Ihminen haluaa usein kokea kuuluvansa johonkin joukkoon, joten usein opimme arvostamaan jotakin asiaa, koska moni muukin arvostaa sitä. Ihminen hakee usein tietämättään hyväksyntää muilta.

Asenteilla on tärkeä vaikutus mieleen. Jos asenne oppimiseen on negatiivinen, uusien asioiden omaksuminen jää vähiin. Kehon ja mielen täytyy olla vastaanottavainen uudelle tiedolle, jotta sitä voi omaksua. Asenteisiin kuitenkin usein vaikuttavat mielen ulkopuolelta tulevia tekijöitä, kuten ympäröivät eri-ikäiset ihmiset sekä niiden persoonat ja asenteet, oma ikä, oma sukupuoli sekä siihen liittyvät roolit ja kehitykset, täysin vieraat tai uudet asiat, mainonta ja väärät tiedot. (Sajaniemi ym. 2015. & Mäkinen, 2004.)

### **3.1.2 Oppimisteorioita**

Oppimisteorioihin tai -käsityksiin vaikuttavat Rauste Von Wright ym. (2003) mukaan yleiset käsitykset inhimillisen tiedon ja psyykkisten prosessien luonteesta, yhteiskunnalliset perinteet ja normit sekä yhteiskunnan asettamat odotukset opetukselle ja koulutukselle ja näin myös oppimiselle. Oppimiselle on jo pitkään kehitelty erilaisia teorioita, jotka ovat vieneet opetusta eteenpäin. Kaksi teoriaa ovat kuitenkin nousseet eniten esille: behavioristinen psykologian teoria, joka perustuu tahattomaan käyttäytymis- ja kokemuseräiseen oppimiseen sekä konstruktivinen teoria, joka on tarkoituksellista oppimista ja tiedonkäyttelyä.

#### **Behavioristinen oppimisteoria**

Behavioristinen oppimisteoria sai alkunsa 1900-luvun alkupuolella ja tarkoittaa teoriaa, jossa tietoa saadaan ympäröivästä maailmasta kokemusten ja aistihavaintojen kautta. Behavioristisissa oppimistilanteissa oppilas varastoi muistiinsa opettajan esittämät asiat eli oppilas reagoi ärsykkeisiin ja vastaanottaa tietoa. Voidaan sanoa, että oppilaan oppiminen on opettajan kontrolloitavana. Opettaja palkitsee oppilasta hyvistä suorituksistaan ja rankaisee huonoista. Virheet sivuutetaan ja keskitytään palautteen antamiseen. Opettajaa ei kyseenalaisteta ja oppiminen on passiivista ja ohjattua. (Tynjälä, 1999.)

#### **Konstruktivistinen oppimisteoria**

Konstruktivistinen oppimisteoria perustuu konstruktivistiseen tiedonkäsitykseen ja humanistiseen ihmiskäsitykseen. Konstruktivismilla on useita suuntauksia, kuten esimerkiksi kognitiivinen konstruktivismi ja sosiokonstruktivismi (Tynjälä 1999). Kognitiivista oppimiskäsitystä on jo 1960-luvulta saakka tutkittu psykologian kehittymisen myötä ja itseasiassa siitä onkin kehittynyt tämä laajempi konstruktivistinen oppimisteoria. Kognitiivisessa konstruktivismissa oppimisprosessi keskittyy ihmismielen toimintaan eli havaintojen, muistin ja ajatusten yhteistyöhön. Oppimistilanteessa pohdinta ja aikaisemmat tiedot ovat keskiössä ja pyritään näkemään yksityiskohtien sijasta koko kokonaisuus.

Sosiokonstruktivismin yhtenä kehittäjänä on kuuluisa neuvostoliittolainen L.S. Vy-

gotsky, jonka mukaan tämän suuntauksen mukaan opiskeltavien asioiden avulla voidaan ymmärtää meitä ympäröivää todellisuutta, johon vaikuttaa kontekstuaalisuus eli kulttuuri, historiallinen tilanne ja sosiaalinen tilanne (Vygotsky 1982).

Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä oppilas siis itse säätelee oppimistaan rakentamalla ja kehittämällä uusia tietoja päässään. Oppilaan täytyy siis olla itse hyvin aktiivinen, jotta voisi oppia. Opettajan rooli on keskittyä oppilaan oppimisprosessia tukevien oppimistilanteiden järjestämiseen. Opetusmenetelmät kognitiivis-konstruktivisessa teoriassa keskittyvät usein oppilaan mielen aktivointiin eli ongelmakeskeiseen oppimiseen, tutkivaan oppimiseen ja tiedon mallintamiseen (esim. käsitekaavion tekeminen). Tiedon prosessointiin vaikuttavat oppijan aikaisemmat kokemukset, tiedot ja taidot. Oppijan oppimisprosessiin kuuluu myös omien ajatusten ulkoistaminen ja niistä keskusteleminen, mikä johtaa tilanteeseen, jossa omia tietoja täytyy selittää ja perustella ja lopulta niitä voi joutua myös muokkaamaan muiden tulkintojen vaikuttamina (Tynjälä 1999). Jotta oppilas voi mielessään uusia tietoja käsitellä, hänen täytyy jatkuvasti käyttää muistiaan. Konstruktivistinen oppimisteoria soveltuu hyvin matematiikan oppimiseen, sillä matematiikassa aikaisemmat tiedot ja taidot vaikuttavat uusien tietojen ja taitojen oppimiseen sekä matematiikassa oppimista tapahtuu myös kielentämisen yhteydessä (Joutsenlahti, 2003a). Matematiikan oppimiseen vaikuttaa myös kontekstuaalisuus, johon syvennyttään myöhemmin tutkielmassa (Joutsenlahti, 2005).

### 3.1.3 Muistin merkitys oppimisessa

Ihmisen kyky käsitellä tietoa perustuu paljolti muistiin. Oppimiseen liitetään käsitteet työmuisti ja säilömuisti. Työmuisti on jatkuvassa käytössä aina, kun ihminen ajattelee. Ihminen voi työmuistin avulla itse valita mihin havaintoihin hän kiinnittää huomiotaan eri tilanteissa. Työmuisti kuitenkin rajoittaa ihmisen huomion kiinnittymistä yksittäisiin asioihin eli montaa asiaa ei voi menestyksellisesti suorittaa samaan aikaan.

Säilömuistissa on työmuistista siirtyneitä ja varastoituneita asioita. Työmuistista siirtyvät ne asiat, joilla on merkitystä, joita on toistettu moneen kertaan ja jotka liittyvät aiempaan jo säilömuistissa olevaan tietoon. Säilömuistissa on itselleen tärkeiksi koettuja

asioita ja tietoja, kuten muun muassa oma osoite, ihmiset, joita tuntee, asiat, joista pitää tai ei pidä sekä menneitä merkittäviä tapahtumia. (Gardner, 1985.)

## 3.2 Oppimiseen vaikuttavat tekijät

Oppimista tapahtuu jatkuvasti sekä tietoisesti että tiedostamatta vahingon, tapahtuman tai teon seurauksena riippumatta tuen määrästä. Oppimiseen vaikuttaa kaikki, mitä ympärillämmme ja sisällämmme tapahtuu. Sitä voi tapahtua kaikkialla, oli se sitten kouluajalla opettajien ja muiden oppilaiden tukemana, kotona perheenjäsenten arvojen ja normien opettelussa, muualla ulkoisen ärsykkeen aiheuttamana tai oppilaan omissa pohdinnoissa tapahtuvana. Jo pienestä arkipäiväisestä havainnosta tai tapahtumasta voi syntyä ajatuksia, jotka kehittyvät yhä vaikuttavimmiksi ja jatkuva oppiminen laajentuu yhä monitahoisemmaksi (Halinen ym. 2016). Menestyksekkäs oppiminen edellyttää, että oppijalla on mahdollisimman vähän asioita, jotka voisivat vaikuttaa oppimiseen negatiivisesti (Ahtola, 2016). Tässä tutkielmassa oppimiseen vaikuttavat tekijät on jaettu kahteen osaan: ulkopuolisiin ja sisäisiin tekijöihin.

### 3.2.1 Ulkopuoliset tekijät

Ulkopuolisilla tekijöillä tarkoitetaan tässä kontekstissa esimerkiksi perhettä sen tuomaa kulttuuria, ympäröiviä lähimpiä ihmisiä tai luokkalaisia, koulua tai asetettuja sääntöjä ja käytänteitä. Joutsenlahden (2005, 55) mukaan kulttuuri onkin yhteydessä matemaattiseen ajatteluun. Eri kulttuurien tuomat uskomukset ja arjen tottumukset vaikuttavat ihmisen ajatteluun ja toimintatapoihin (Saario 2009).

#### **Koti ja läheiset**

Koti on yksi vahvoista vaikuttajista oppimisessa. Kodin täytyisi tuntua turvalliselta paikalta, jossa voi saada tukea ja apua oppimiseen aina tarvittaessa (Ahtola, 2016). Tämä saattaa vaikeutua, jos kotikieli on eri kuin koulun opetuskieli. Ongelman kohtaavat useimmiten maahanmuuttajaoppilaat, joiden vanhemmat eivät pysty esimerkiksi auttaa suo-

menkielisissä tehtävissä tai kommunikaatio kodin ja koulun välillä on hankalaa. Dervinin (2016) mukaan tämä voi näkyä tehtävien ymmärtämisessä, sillä niissä esiintyviä toimintoja ja käsitteitä ei välttämättä tunneta maahanmuuttajaoppilaan omassa kulttuurissa. Tehtävässä kuvattujen tilanteiden kokemusten puute voi hämmentää oppilasta sekä opettajaa. Tämä vaikea tilanne voi vaikuttaa oppijan asenteisiin ja motivaatioon useimmiten negatiivisella tavalla riippuen yksilöstä. Vanhemmat eivät usein pysty tällaisessa tilanteessa seuraamaan ja tukemaan lapsensa koulunkäyntiä. Näissä tilanteissa vanhemmasta sisaruksesta voisi olla paljonkin apua, mutta ainoana lapsena tilanne voi olla hyvinkin vaikea ja apua voi olla vaikea pyytää. (Dervin 2016)

Lapsen hyvinvointiin voi myös vaikuttaa kodin taloudellinen tilanne tai jokin yllättävä tapahtuma. Jos koti ei pysty tarjoamaan oikeanlaisia olosuhteita hyvän terveyden ylläpitämiselle, lapsella saattaa olla vaikeuksia löytää energiaa keskittyä omaan oppimiseen ja kehitykseen varsinkin, jos koulu ei ole tietoinen kotihuolista. Yllättävät tapahtumat, kuten läheisen kuolema tai sairastuminen voivat vaikuttaa lapsen mielentilaan ja vaikeuttaa oppijan oppimista. (Ahtola 2016.)

Onneksi kodin lisäksi on kuitenkin vielä kaverit, jotka voivat tukea vaikeassa tilanteessa olevaa lasta. Toisaalta kaverit voivat myös kotitilanteesta huolimatta aiheuttaa stressiä ja inhottavia tilanteita, kuten kiusaamistilanteita (Ahtola 2016). Ensinnäkin täytyy löytyä kavereita, joiden kanssa voi jakaa asioida, jos omia asioida uskaltaa jakaa. Ahtolan (2016) mukaan kaverit voivat myös aiheuttaa sosiaalisia paineita tai paineita kuulua johonkin joukkoon. Tämä voi hyvinkin johtaa vääränlaiseen porukkaan päätymiseen ja tilanteeseen, jossa täytyisi ikään kuin todistaa itseään. Jos lapsella on itsellään jo vaikeuksia kotona, hän normaalisti etsii jostain muualta mallia tai hyväksyntää. Lapsi vertailee paljon itseään muihin, mistä useimmiten syntyykin ulkonäköpaineita ja kilpailua. Kaverit voivat tietenkin myös saada aikaan positiivisia asioita, vaikka kotona asiat olisivat hankalia. Oikeanlaiset kaverit voivat saada lapsen kokemaan yhteenkuuluvuuden tunteen, rakkautta, onnistumisia, toisten tukea, turvaa ja rauhaa ja siten auttaa selviytymään koulun käynnistä ja oppimisesta. (Ahtola 2016.)

## Koulu

Lapsen oppimiseen vaikuttaa myös tietenkin koulu. Koulussa vastuu lapsen oppimisesta kuuluu siellä työskenteleville aikuisille. Koulussa on tietenkin opettajien ja muun henkilökunnan lisäksi koulukaverit, jotka voivat vaikuttaa oppimiseen edellisessä kappaleessa mainituilla tavoilla.

Lapsena voi olla vaikea asennoitua positiivisesti oppimiseen, jos kouluun meneminenkin on raskasta ja vastahakoista. Koulun täytyisi siis osata luoda oppilailleen turvallinen ja miellyttävä ilmapiiri, jossa apua saa tarvittaessa ja ketään ei kiusata tai jätetä yksin. Oppilaita täytyisi kannustaa ja puskea kehittämään itseään, mutta heitä täytyisi myös rajoittaa. Jokaisen lapsen täytyy tietää koulun ja oppituntien säännöt ja käytänteet, jotta kaikilla olisi samat lähtökohdat oppimiselle. Opettajienkin täytyy pitää kiinni pienistäkin sovitusta säännöistä, jotta oppilaat kokisivat, että kaikkia pidetään tasavertaisina ja ketään ei suosita tai syrjitä. (Ahtola, 2016.)

Opettajalla on tärkeä rooli saada oppilaat kokemaan onnistumisen tunteita ja vakuuttaa heille, että kyseinen oppiaine on hyödyllistä. Tätä varten opettajien täytyisi osata huomioida kaikkien oppilaiden tarpeet, vahvuudet ja heikkoudet sekä mahdollisimman monta oppimistyyliä, jotta kaikilla olisi mahdollisuus oppia omalla tavallaan. (Dervin, 2016.) Joissakin kouluissa tämä voi olla vaikeaa, jos joidenkin oppilaiden kanssa ei ole yhteistä kieltä tai joillakin on vaikeuksia ilmaista itseään. Itselläni on tästä kokemuksia, sillä toimin neljän vuoden aikana (2015-2019) useasti sijaisena Merilahden peruskoulussa, jossa valtaosa oppilaista on ulkomaalaistaustaisia tai maahanmuuttajia. Vastaan tuli tilanteita, joissa oppilas oli juuri tullut Suomeen eikä silloin pystynyt kommunikoimaan opettajan kanssa, kun ei ollut yhteistä kieltä. Matematiikan oppimiseen voi myös vaikuttaa matematiikan kieli, joka voi joillekin oppijoille olla oman äidinkielen ja opetuskielen lisäksi kolmas kieli, jota täytyisi samanaikaisesti osata. Tähän asiaan perehdytään lisää luvussa 4.

Uskon, että opetussuunnitelmien ja opiskelutapojen muutokset voivat myös vaikuttaa oppimiseen. Kun opetussuunnitelmat muuttuvat, opettajat kohtaavat tilanteita, joissa heidän täytyy ensimmäistä kertaa opettaa jotakin kurssia tai sopeutua uudenlaiseen

toimintatapaan. Hyvä esimerkki tästä voisi olla lukion yhteinen ensimmäinen matematiikan kurssi pitkän ja lyhyen matematiikan lukijoille tai ylioppilaskokeiden sähköistyminen, ja näistä johtuvat opetus- ja opiskelumenetelmien muutokset. Tietokoneilla opiskelu voi olla hyvinkin iso muutos oppilaalle, joka on tottunut kirjoittamaan tai laskemaan käyttäen paperia ja kynää. Sähköistymisestä on jo jonkin aikaa, mutta teknologia kehittyy kovaa vauhtia ja uusia sähköisiä oppimisalustoja luodaan jatkuvasti. Muutokset voivat olla opettajallekin hyvinkin vaikeita, jos hänkin vasta tutustuu näihin metodeihin.

Vasta hiljattain matematiikan ylioppilaskokeen sähköistymisen vuoksi lukion ensimmäisellä luokalla oppilaat eivät välttämättä ole ainakaan vielä tarpeeksi osaavia sähköisten apuvälineiden kanssa. Matematiikan oppiminen voi olla hankalaa jo lukion ensimmäisellä matematiikan kurssilla, joka on yhteinen kaikille oppilaille. Uskon, että yhteinen kurssi on joillekin liian vaativa jo runsaan asiasisältönsä vuoksi etenkin sellaisille oppilaille, jotka tietävät valitsevansa lyhyen matematiikan. Asiasisältöjen lisäksi täytyisi oppia käyttämään sähköistä alustaa ja kirjoittamaan matematiikan kieltä tietokoneella. Minusta matematiikan kieli on lukiossa vielä monimutkaisempaa sekä opiskelutahti ja kurssit sen verran raskaampia, että muutokset ja mahdolliset omat kielelliset vaikeudet kaikki yhdessä voivat joidenkin oppilaiden kohdalla musertaa oman itseluottamuksen, motivaation ja asenteen, mikä voi hankaloittaa tietenkin oppimista. Toisaalta tämä tapa työskennellä voi joillekin itse asiassa olla motivoivampaa, virkistävää ja selkeämpää.

### 3.2.2 Sisäiset tekijät

Oppilaan sisäisillä tekijöillä tarkoitetaan oppilaan mielentiloja, tunteita ja oppimisstrategioita. Jotkut tunnit ovat aina jollekin miellyttävämpiä kuin toiset. Tämä voi johtua oppilaan ennakkokäsityksistä oppiaineesta tai opettajasta. Jotkut oppilaat ovat usein aikaisempien kokemusten perusteella päättäneet, että jokin aine on tylsää, vaikeaa tai inhottavaa. Heillä voi myös olla joistakin opettajista ennakkokäsityksiä, jotka ovat ehkä peräisin muiden luokkaryhmien sanomisista tai jopa opettajan ulkonäöstä. Nämä ennakkokäsitykset voivat vaikuttaa oppijan mielen toimintoihin ja sitä kautta oppimiseen. Joutsenlahden (2005) mukaan oppijan uskomukset, tunteet ja asenteet ovat tärkeitä tekijöitä

matemaattisessa ajattelussa ja osaamisessa. Uskomukset ohjaavat matemaattista ymmärtämistä ja siten myös osaamista. Oppija mahdollisesti liittyy Haapasalon (2011) mukaan uskomuksiaan enemmän matematiikkaan kuin mihinkään muuhun oppiaineeseen. Uskomukset, tunteet ja asenteet voivat liittyä kulttuuriin tai matematiikan oppitunneilla tapahtuviin asioihin ja ne voivat syntyä myös oppilaan tiedostamatta. Nämä sisäiset tekijät ohjaavat oppijan käyttäytymistä ja vaikuttavat matematiikan oppimiseen. Oppilaalla saattaa esimerkiksi olla uskomus siitä, että jokin tietty aihealue matematiikassa on vaikeaa, koska on niin kuullut luokkatovereiltaan, vanhemmiltaan tai jopa opettajalta.

Luokkahuoneessa lapset ovat tiiviisti muiden katseiden alla. Jos luokkakaverit ovat joskus olleet epämiellyttäviä tai ovat kommentoineet toisen epäonnistumista, oppilas saattaa pelätä tilanteen osumista omalle kohdalleen tai tilanteen toistumista. Ahdistuksen tunne saattaa joidenkin kohdalla olla hyvinkin vahva ja johtaa itsensä sulkeutumiseen ja passiivisuuteen. Joillekin saattaa muodostua myös ajatus, että kyseinen aine on kamala tai, että ei kuitenkaan tule pärjäämään siinä. Ala- ja yläkouluikäiset helposti vertaavat itseään muihin ja ryhmään saattaa muodostua suoriutumispaineita tai liiallista kilpailuhenkistä ilmapiiriä, jotka voivat johtaa alisuoriutumiseen tai jopa epäonnistumiseen.

Opettaja voi vaikuttaa luokassa olevaan ilmapiiriin ja tehdä oppitunneista hausempia ja miellyttävämpiä, mutta vaikeinta on saada oppilaan motivaatio heräämään etenkin, jos se on joskus pahasti sammunut. Ihmiset kokevat motivaatiota eri tavoilla. Toiset ovat aidosti kiinnostuneita ja siten myös motivoituneita erilaisista aiheista, kun taas toiset kamppailevat motivaation löytämisen kanssa. Motivaation muotoja on Salmela-Aro ja ym (2018) mukaan kahta tyyppiä: Autonominen eli sisäinen motivaatio ja sen vastakohtana kontrolloitu motivaatio. Autonomisen motivaation muotoja on kaksi:

1. **Sisäsyntyinen motivaatio:** motivaatio syntyy itse tekemisestä; se on innostavaa, kiinnostavaa ja nautittavaa.
2. **Integroitu motivaatio:** henkilö kokee tekemisen omien arvojensa ja omakuvansa mukaiseksi.

Kontrolloidussa motivaation muodossa tekeminen tuntuu pakotetulta. Tunne voi johtua sisäisestä tekijästä, kuten syyllisyyden tunteesta tai ulkoisesta tekijästä, kuten rangais-



tusten uhasta tai kontrolloivalta tuntuvalta palkitsemisesta. Sisäisellä motivaatiolla on Salmela-Aro ja ym. (2018) mukaan myönteinen vaikutus työsuoritukseen ja henkilökoh-  
taiseen hyvinvointiin. Tähän koulu voi vaikuttaa tarjoamalla tukea, sopivan haastavia  
tehtäviä, mukavaa ilmapiiriä ja hyviä työskentelyolosuhteita.

### 3.3 Erilaiset oppijat

Oppiminen ei ole siis pelkästään yhteisöllinen prosessi vaan myös yksilöllinen. Ihmisen  
täytyy oppia ottaa yhä enemmän vastuuta oppimisestaan tai ylipäänsä elämästään van-  
hetessa. Jos nuorta koululaista ja elämää nähnyttä 70-vuotiasta verrataan toisiinsa, on  
selvää, että 70-vuotias on oppinut itsestään ja maailmasta enemmän asioita kuin koulu-  
lainen. On kuitenkin mahdollista, että koululainen oppii jotain, mitä 70-vuotias ei jo tiedä  
tai osaa. Maailma kuitenkin muuttuu koko ajan ja siten ihmisen käyttäytyminen ja hen-  
kilökohtaiset arvotkin voivat muuttua. Omat arvot voivat muuttua moneenkin kertaan  
oman elämän aikana eri oppimistilanteiden takia. Niihin vaikuttavat usein ympäröivien  
ihmisten ohjaukset, näkemykset ja arvot. Oppija itse on viime kädessä tärkein vaikutta-  
ja tunteiden, motivaation, aktiivisuuden ja ajatusten ohjaajana ja ulkoiset tekijät voivat  
vain tukea ja edesauttaa oppimista ja oppijan hyvinvointia.

#### 3.3.1 Oppimisstrategiat

Oppimisstrategioilla tarkoitetaan opiskelijan suhtautumistapaa opiskeluun, jolloin opiske-  
lija prosessoi oppimistapahtumaan liittyviä tietoja. Oppijan oppimistyyliin ja -strategioihin  
vaikuttavat muun muassa oppijan oma tausta ja ympäristö, kuten perhe ja sen toiminta-  
tavat, oma kulttuuri, jo aikaisemmin opitut arvot, ennakkokäsitykset, aikaisemmat koulut,  
suhteet kavereihin tai opettajiin sekä suhtautuminen itse koulunkäyntiin ja eri aineisiin.  
Näiden lisäksi oppimiseen vaikuttaa oppijan tapa vastaanottaa, käsitellä ja prosessoida in-  
formaatiota ja millaisessa olosuhteissa oppija parhaiten kokee oppivansa. Oppija turvau-  
tuu oppimisstrategioihin, jotta oppiminen olisi helpompaa, mielekkäämpää, tehokkaam-  
paa ja edelleen toimivaa tulevaisuudessa. Oppijan metakognitiivisista tiedoista ja taidoista

puhutaan, kun tarkoitetaan oppijan kykyä valita sopiva oppimisstrategia eri tilanteisiin. (Mäkinen, 2004.)

Ruotsalainen kasvatustutkija Ference Marton tutki 1970-luvulla oppimisstrategioita. Hänen mukaansa oppimisstrategiat jaetaan pinta- ja syväsuuntautuneisiin oppimistapoihin. Pintasuuntautuneessa oppimistilanteessa oppijan oppiminen tapahtuu usein melko tiedottomasti ja siten jää pintapuoleiseksi. Oppija ei pohdi asiasisältöä vaan pyrkii päättämään ulkoa stressaavan tentin takia. Oppimista tapahtuu siis työmuistissa. Syväsuuntautuneessa oppimistilanteessa oppija pyrkii ymmärtämään opittavat asiat ja hahmottamaan niistä selkeitä kokonaisuuksia sekä kyseenalaistaa opittujen asioiden totuudellisuutta. Oppimisstrategioita on myös Suomessa tutkinut Maria Vauras (1991), joka erittelee strategiat viiteen luokkaan:

1. **Holistinen strategia:** Kokonaiskuvan hahmottaminen.
2. **Meristinen strategia:** Yksittäisten asioiden omaksuminen.
3. **Atomistinen strategia:** Yksityiskohtiin keskittyminen.
4. **Serialistinen strategia:** Asioiden jäsentäminen oman periaatteen nojalla.
5. **Transformaatiostrategia:** Asioiden sitominen aiempiin tietoihin esimerkiksi luokittelemalla.

## **Informaation vastaanottaminen ja prosessointi**

Aistimme antavat meille tietoa ulkomaailmasta ja siten ne ovat yhteydessä ajatteluun ja tiedon prosessointiin. Kaikilla ihmisillä ei ole samat aistikanavat yhtä vahvoja. Eri tavat vastaanottaa informaatiota voivat olla esimerkiksi visuaalisia (näkö), auditiivisia (kuulo), kinesteettisiä (liikkuminen) tai taktiilisia (kosketus). Visuaalinen oppimistapa voisi olla lukeminen tai kuvien näkeminen, auditiivinen tapa voisi olla luennon seuraaminen, kinesteettinen tapa voisi olla kirjoittaminen tai toiminnallisen tehtävän suorittaminen ja taktiilinen tapa voisi olla keskittymistä auttava asioiden näprääminen tehtävän suorittamisen aikana. Nämä oppimistavat voivat auttaa tiedon prosessoinnissa. (Prashnig, 2000.)

Oppimisessa on tärkeää tiedon omaksuminen eli sen ymmärtäminen, jäsentäminen ja kehittäminen. Vain prosessoituja opittuja asioita voi käyttää uudelleen tai soveltaa uusissa tilanteissa. Tieto voidaan Joutsenlahden (2003a) mukaan jakaa konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon. Konseptuaalisella tiedolla tarkoitetaan laajemman tietoverkon osaa, jossa tieto kytkeytyy muihin tietoihin. Proseduraalisella tiedolla taas tukeudutaan matemaattisiin sääntöihin, kaavoihin ja symboleihin ongelmanratkaisutilanteissa. (Joutsenlahti, 2005 & Haapasalo, 2004.) Asioiden sisäistämiseen siis auttaa uusien asioiden kytkeminen aikaisemmin opittuihin asioihin sekä kokonaisuuksien hahmottaminen helpottuu esimerkiksi miellekarttojen tai omien tiivistelmien avulla. Eri oppiaineissa käytetään erilaisia mieleenpainamistapoja. Kielissä uusien sanojen tai kielioppisääntöjen muistamisessa voi helpottaa omien lauseiden keksiminen. Matematiikassa koetaan usein, että usean samankaltaisen tehtävän tekeminen tai ylipäänsä jatkuvat toistot helpottavat asioiden muistamista.

## **Olosuhteet**

Jokaiselle löytyy oman oppimistyylin lisäksi myös tietynlaiset olosuhteet, joissa oppii parhaiten. Huoneen lämpötila ja kirkkaus, oma työskentelyasento, työistuntojen pituudet ja välipalat ovat yksinkertaisia asioita, jotka voivat vaikuttaa oppimisen laatuun. Näiden lisäksi oppimistilanne voi olla monessa oppiaineessa tai eri opettajien kanssa erilainen. Välillä täytyy tehdä ryhmässä töitä, välillä parin kanssa tai ehkä yksinkin. Joillekin sopii itse asiassa vielä paremmin, jos oppiminen ei ole ohjattua vaan työskentely olisi itseohjautuvaa ja kokonaan itsenäistä. Motivaation lähdekin täytyy löytyä. Ohjatussa opiskelussa se voi syntyä opettajan innoittamana esimerkiksi pelin muodossa, mutta usein ohjatusakin opiskelussa oppijan täytyy itse motivoitua, jotta oppimista tapahtuisi. Oppimisen maksimoimiseen oppijan täytyy tuntea omat vahvuutensa ja osata hyödyntää niitä. Sitten nikkyy on myös hyvän oppijan piirre.

### 3.3.2 Oppijan metakognitiiviset opiskelutaidot

Lapsilla saattaa olla väärä käsitys omista metakognitiotaidoista. Oppijan metakognitiivisilla opiskelutaidoilla tarkoitetaan hänen tietoansa omista tiedonkäsittelyprosesseistaan, kuten ajattelusta ja muistista. Tämän taidon avulla hän tietää onko jo oppinut kyseisen asian ja pystyy säätämään omaa oppimistaan ja ajatteluaan seuraamalla ja ohjaamalla niitä (Tynjälä, 1999). Metakognitiiviset opiskelutaidot ovat erittäin tärkeässä roolissa itsenäisemmässä työskentelyssä, jossa täytyy jatkuvasti arvioida omaa työskentelyään ja kehittää sitä. Itsenäiseen työskentelyyn tarvitaankin aivan erilaista motivaatiota, itseluottamusta ja sinnikkyyttä. Metakognitiiviset taidot kehittyvät iän myötä, kun oppija oppii itse säätämään oppimistaan. Tällöin oppijalla on kyky valita omat tavoitteensa ja oppimisstrategiansa.

### 3.3.3 Oppimisvaikeudet

Jokaisesta koulusta löytyy sellaisia lapsia, joilla on jonkinlainen oppimisvaikeus. Näihin on usein syynä aivotoiminnan häiriöt. Taustalla voi olla yksinkertaisesti omat asenteet tai luulot itsestään, mutta myös kielelliset ongelmat, kuten lukivaikeudet, visuospatiaalisen hahmottamisen vaikeudet, tarkkaavuus- ja keskittymisvaikeudet (esim. ADHD tai ADD) tai neurologiset sairaudet, kuten epilepsia. (Jaakkola ym. 2012)

Lukivaikeus on yleisin oppimishäiriö, jonka taustalla on poikkeama aivojen toiminnassa. Oppija, jolla on lukivaikeus lukee hitaasti ja käsittelee äänteitä vaikeasti. Lukivaikeus voi johtua alhaisesta motivaatiosta, jonka on voinut aiheuttaa riittämätön opetus tai oppimiskyky. Tarkkaavuus- ja keskittymisvaikeudet voivat vaikeuttaa oppilaan oppimista. Tarkkaavuushäiriöiselle oppijalle on ominaista reagoida ulkopuolisiin ärsykkeisiin, kuten kynän tippumiseen lattialle, jolloin varsinainen oppimistilanne keskeytyy tai häiriintyy. Oppija on siis impulsiivinen ja häiriöherkkä, vaikka hän olisi muiden kanssa älyllisesti samalla tasolla. Hän voi myös olla passiivinen ja unohtua omiin ajatuksiinsa. (Jaakkola ym. 2012)

Oppimisvaikeuksiin on tärkeää puuttua ajoissa, jolloin täytyy aloittaa mahdolliset tukitoimet auttaakseen oppilaan oppimista. Matematiikan opiskelussa tehdään usein paljon

tehtäviä, jolloin musiikin kuuntelu tai jokin asetettu tavoite voi auttaa tarkkaavuushäiriöstä kärsivää lasta keskittymään.

Poikkeuksellisen lahjakas oppilas voi myös törmätä oppimisongelmiin. Valitettavasti opettajat taipuvat keskittymään enemmän heikosti menestyviin lapsiin ja erityislahjakkait oppijat jätetään huomiotta. Nämäkin lapset tarvitsevat huomiota ja tukea. Heillä voi herkästi kiinnostus lopahtaa, jolloin syntyy keskittymisvaikeuksia tai jopa häiriökäyttäytymistä. Erityislahjakkaita 15-40% ei saavuta täyttä oppimispotentiaaliaan. (Jaakkola ym. 2012)

## Luku 4

# Opetuksessa käytetyt kielet

Joutsenlahden (2003a) mukaan kielellä on muitakin ominaisuuksia kuin puhuttu ja kirjoitettu kieli, muun muassa ilmeet, eleet ja kuvat ovat hänen mukaansa osa kieltä. Kieli on tärkeässä asemassa matematiikassa, sillä se on väline tiedon välittämiseen ja ajattelun konkretisointiin. Matematiikan opetuksessa käytetäänkin ainakin kahta eri kieltä. Toinen on matematiikan symbolikieli ja toinen on suullinen ja kirjallinen kieli. Joutsenlahti ja Rättyä (2011) ovat tästä samaa mieltä, mutta he eivät kuitenkaan usko, että matematiikan symboli- tai kuvakieli olisi verrattavissa muihin kieliin. Pimm (1987) taas uskoo, että matematiikan kieli on kokonaisuudessaan kielisysteemi, jossa esiintyy symboleja, mutta sen opiskelu eroaa muiden kielten opiskelusta. Itse kallistun Pimmin uskomusten puoleen. Onhan maailman kaikilla kielillä omia symboleja: kirjaimia ja numeroita tai piirustuksen näköisiä tekstejä. Jokaisella on myös ne aivojen osa-alueet, jotka tunnistavat matematiikan kielen ja jotka ylipäänsä aktivoituvat matemaattisissa tilanteissa, jolloin jokaisella on mahdollisuus oppia ja osata matematiikkaa. Täytyy vain löytää jokaiselle oikeat tavat ja kannustaa erilaisiin tapoihin ilmaista matematiikan osaamistaan eli löytää erilaisia tapoja kielentämiseen. Seuraavaksi käsittelenkin matematiikan kieltä ja kielentämistä ja näiden vaikutusta matematiikan oppimiseen.

## 4.1 Matematiikan kieli ja kielentäminen

Matematiikan kieli on yllättävän monipuolinen. Siinä voi esimerkiksi vaihdella tapa, jolla merkitään laskuja. Monessa tilanteessa on olemassa montakin tapaa ilmaista, mitä lasketaan. Yksinkertainen esimerkki voisi olla jakolasku, joka voidaan merkitä ja laskea käyttämällä kaksoispistettä, murtoviivaa tai jakokulmaa. Tämän esimerkin erilaisilla merkintätavoilla on muitakin eroja esimerkiksi, kun osamäärä ei olekaan kokonaisluku: kaksoispisteellä laskettu jakolaskun vastaus on usein pyöristetty desimaaliluku, murtoviivaa käyttämällä saadaan tarkka vastaus murto- tai sekalukuna ja jakokulman kanssa voi saada esimerkiksi vastaukseksi 24 jää 3. Eri merkintätapaa käytetään eri tilanteissa ja eri ikäisenä. Kun lapset ensimmäisiä kertoja tutustuvat toisella ja kolmannella vuosiluokalla jakolaskuihin, heillä ei ole tietoa desimaaliluvuista. Tällöin he oppivat, että jakolasku ei mene aina 'tasan' vaan jäljelle jää jakojäännös. Vasta kuudennella oppilaat tutustuvat desimaalilukuihin ja oppivat, että jakolaskun tulos voi olla myös desimaaliluku tai murtoluku (Opetushallitus 2016).

Matematiikassa käytetään myös paljon erilaisia symboleja ja yksittäisiä kirjaimia. Symbolit tulevat useimmiten kreikkalaisista aakkosista ja kirjaimet englannin kielen sanoista. Symbolien tehtävinä on muun muassa esittää muuttujia, ilmaista matemaattisten objektien nimiä ja niiden välisiä suhteita, kertoa, mitä lasketaan seuraavaksi. Esimerkiksi derivointia voidaan ilmaista isolla D-kirjaimella tai apostrofin avulla ja integrointi suurella s-kirjaimen muotoisella symbolilla. Kirjaimet voivat ilmaista muun muassa funktioita, joukkoja, kappaleita tai geometriaan liittyviä laskettavia asioita, kuten  $r$  (= radius) ilmaisee ympyrän sädettä.

Kaikkien oppilaiden täytyy siis oppia matematiikan kielen sanastoa matematiikan lasku- ja ongelmanratkaisutaitojen lisäksi. Tämä matematiikan kielelle kehittynyt oma laaja sanasto on tuonut sille omia ilmaisuja ja tapoja viestiä matemaattisia sisältöjä siten, että jotkin sanat eivät sekoitu arkikielessä käytettyihin sanoihin. Suomessa matematiikan puhutussa kielessä esiintyy esimerkiksi sana tekijä, joka tarkoittaa arkikielessä ihmistä, joka tekee tai luo asioita, mutta matematiikassa tulon tekijä tarkoittaa kertolaskussa kertojaa tai kerrottavaa. Haapasalon (2011) mukaan matemaattisia käsitteitä ei aina

voi tunnistaa, kun niihin voi törmätä erilaisissa konteksteissa. Oppilaan on siis pystyttävä erottamaan matemaattiset käsitteet arkikielen käsitteistä sekä oppia täysin uuttakin sanastoa.

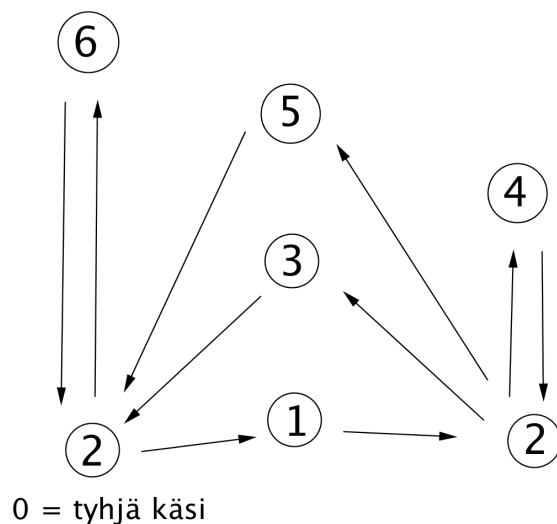
Yhteisen kielen ja matemaattisen sanaston lisäksi matematiikan kieli on alun perinkin vaikeasti ymmärrettävää ja oppilaiden persoonat sekä oppimisvaikeudet voivat vaikeuttaa kielentämistä. Abedin ja Lordin (2001) mukaan matematiikan kieli on usein vanhahtavaa, käsitteet ja kysymykset ovat usein pitkiä ja monimutkaisia sekä asioista puhutaan usein passiivissa, mikä saattaa olla kummallista oppilaille, kun ei ole selkeää subjektia. Matematiikka on siis monimutkaista joillekin ehkä jo sisältöjensä ja sanastonsa takia, mutta sillä vielä kaiken lisäksi on oma diskurssinsa ja syntaksinsa. (Riordain & McCluskey, 2015.) Oppilaita on myös erilaisia. Monet ovat ulospäin suuntautuneita ja pystyvät helposti ilmaisemaan itseään yleisesti elämässään ja siten myös ehkä uskaltavat helpommin puhua matematiikan tunneilla, kun taas monet muut ovat sisäänpäin suuntautuneita ja voivat kokea vaikeuksia jo pelkästään ihmisten ilmoilla olemisessa. Jollakin voi olla oppimisvaikeus ja hävetä sitä. Tämän lisäksi oppilaalla voi myös olla välittämättä oppilaan persoonasta mahdollisia pelkoja epäonnistua tai näyttää naurettavalta, mikä usein on ryhmähengen aiheuttamaa tai johtuu opettajan toimintatavoista tai tämän luomasta ilmapiiristä.

Matematiikan kieli toimii siis aika lailla samalla tavalla kuin muut maailman kielet: se kehittyy koko ajan, sillä on monessa tilanteessa montakin tapaa ilmaista asioita, sillä on omia sääntöjä ja kaavoja, useimmat merkintätavat ovat vakiintuneita ja sen rakennetta voi ikään kuin verrata muiden kielten kielioppiin. Matematiikka on lähes koko maapallolle tuttu ja siksi voidaankin olettaa, että ympäri maapalloa löytyy ihmisiä, jotka mahdollisesti ymmärtävät toisiaan matemaattisessa kontekstissa, vaikka heillä ei välttämättä ole yhteistä puhuttua kieltä. Matematiikan kirjoitettu kieli on siis ympäri maailmaa samankaltaista, mutta matematiikasta puhuttaessa ääneen se tarvitsee toisen kielen avukseen.



### 4.1.1 Matematiikan kieli muualla

Matematiikan kieleen voi törmätä ihmeellisissä tilanteissa. Joissakin tilanteissa se voi tuoda ihmisiä yhteen, kuten jonglöörien joukossa. He nimittäin käyttävät matemaattisia kaavoja kuvaamaan erilaisia temppuja (esim. kahden hengen jonglöörauksessa voi törmätä kaavoihin:  $2n - 1$  tai  $2n + 1$ ). Yksinkertaisessa yhden hengen jonglöörauksessa käytetään usein Siteswap-notaatiota, joka kehitettiin 1980-luvulla. Tässä notaatiossa luvut kertovat iskujen määrän heittojen välissä ja siinä oletetaan, että jonglöörauksessa on tasainen tahiti. Mitä korkeampi heitto, sitä suurempi luku on, sillä kestää kauemmin, että kyseinen esine otetaan kiinni ja heitetään uudestaan. Luku nolla edustaa tyhjää kättä, luvussa yksi esine vaihtaa nopeasti kättä vaakasuorasti, luku kaksi edustaa kädessä olevaa esinettä, muissa parillisissa luvuissa esine heitetään ja otetaan kiinni samalla kädellä ja parittomissa luvuissa esine vaihtaa aina kättä (Kuva 4.1). Esimerkiksi tunnettua kolmen pallon jonglöörausta *Cascadea*, jossa pallo vaihtaa aina kättä, kuvataan luvulla kolme, jonka korkeus on suunnilleen silmien tasolla. Notatio helpottaa yhdessä jonglööraamisen lisäksi myös temppujen hahmottamisessa ja uusien temppujen kehittämisessä. (Polster 2002.)



Kuva 4.1: Siteswap -kaavio (tehty GeoGebralla 1.11.2019)

### 4.1.2 Matematiikan kielentäminen

Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan Joutsenlahden (2003a) mukaan sitä, että oppilas pystyy ilmaisemaan kielen avulla omaa matemaattista ajatteluaan muille. Tämä johtaa siihen, että oppilas samalla kehittää omaa matemaattista ajatteluaan ja jopa osaamistaan, kun hän puhuu ajatuksiaan ääneen. ääneen ajatteleminen voi auttaa asioiden jäsentelyssä ja myös mahdollisesti ryhmässä löytämään ratkaisua matemaattiselle ongelmalle (Ilves, 2005). Joutsenlahden ja Rättyän (2011) mukaan matemaattinen ymmärrys näkyy opiskelijan oman kielen käytössä ja siten pystyy opiskelija ilmaisemaan matemaattisille käsitteille antamiaan merkityksiä. Kielentäminen voi olla suullista tai kirjallista ja sitä voi opetuksessa harjoitella erilaisissa keskustelutilanteissa. Kielentämistä voi myös tapahtua yksinään jo omissa ajatuksissa, itsekseen ääneen ajattelemalla tai nimenomaan kirjallisella tuotoksella. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) matematiikan tavoitteissa korostetaan myös matematiikan kielellistä puolta. Oppilaiden matemaattiseen suulliseen ja kirjalliseen ilmaisuun täytyisi kannustaa ja heitä täytyisi rohkaista käyttämään ajattelua tukevia piirroksia ja välineitä yksin ja ryhmässä. Oppilaan täytyy siis osata perustella ratkaisujaan ja tuoda ulos omaa ajatteluaan myös ryhmässä. Matematiikan kielentämisessä voi esiintyä kuitenkin erilaisia ongelmia jo täysin suomalaisille lapsille, mutta vielä enemmän vierasta kieltä puhuville.

#### Suullinen kielentäminen ja luonnollisen kielen käyttö

Silfverberg, Portaankorva-Koivisto & Yrjänäinen (2005, 154) ovat pohtineet matematiikan kielen tuomista oppitunneille. He vertasivat matematiikan opetusta kielikasvatukseen ja korostivat oppilaiden keskinäisen vuoropuhelun merkitystä kielen omaksumiseen. Suullista kielentämistä voi tapahtua opetuksessa kolmessa eri tilanteessa: opettajan johtamassa koko luokan keskustelussa, oppilaiden kesken pienissä ryhmissä tai parin kanssa. Koko luokan keskustelussa täytyisi pyrkiä siihen, että oppilaat eivät pelkäisi tehdä virheitä ja siten pystyisivät omin samoin ilmaisemaan itseään siten, että luokassa pysyy positiivinen ja turvallinen ilmapiiri. Tällaisessa keskustelussa oppilaat pystyvät verrata omia tietämyksiä muiden tietämyksiin ja he pääsevät harjoittelemaan keskustelemista isossa ryhmäs-

sä kunnioittaen jokaisen puheenvuoroa. Koko luokan keskustelunaiheet voisivat keskittyä mieluummin olettamuksiin ja perustelujen testaamiseen kuin tietämykseen, jotta oppilaat hyötyisivät muiden ideoista ja voisivat syventää omia ajatuksiaan (Burton 1984). Opettajan rooli koko luokan keskustelussa keskittyy keskustelun johtamiseen ja kysymyksien esittämiseen kannustaen oppilaita sujuvaan ja ajatuksia syventävään keskusteluun. Oppilaat pystyvät kuitenkin helpommin tuomaan omia mielipiteitään ja ajatuksiaan esiin, kun koko luokka ei ole kuulolla. Näissä keskusteluissa opettaja ei pysty kuulemaan tai johtaa kaikkia keskusteluja, joten keskustelun aihe voi muuttua aivan toisenlaiseksi, jolloin matematiikan kielentäminen jää vähiin. Näin voi todennäköisesti tapahtua parikeskustelussakin, jossa kukaan ei ole sitä valvomassa tai johtamassa ja toinen parista saattaa olla enemmän äänessä kuin toinen. Parikeskusteluja voi kuitenkin liittää koko luokan keskusteluun siten, että ensiksi mietitään parin kanssa argumentteja, joita voi sitten koko luokan keskustelussa tuoda esille. Tärkeintä on saada oppilaat puhumaan matematiikan aiheista, jolloin Joutsenlahden ym. (2012) mukaan oppilas saadaan myös ajattelemaan matematiikkaa.

Oppilaiden on siis ensin uskallettava tuoda ajatuksiaan esille ennen kuin matemaattista kielentämistä voitaisiin kunnolla harjoitella. On todettu, että matemaattinen ajattelu ja luonnollisen kielen käyttäminen olisivat enemmän yhteydessä toisiinsa kuin on uskottu (Morgan 2000). Kun oppilaat ovat oppineet kuvailemaan tehtävien ratkaisuja omin sanoin, opetus voi keskittyä paremmin matematiikan kieleen ja sen kielentämiseen. Tällöin oppilaiden matematiikan kielentäminen kehittyy vähitellen sujuvammaksi ja oppimistakin tapahtuisi helpommin (Joutsenlahti & Kulju, 2010). Jos oppilaat keskittyvät liikaa matematiikan kielentämiseen, heillä jää helposti asian sisäistäminen taka-alalle. Voi jopa käydä niin, että oppilaat luottavat lopulta enemmän matematiikan eri sääntöihin, toimintatapoihin ja käsitteisiin kuin omaan järkeen. Lisäksi oppilas voi sokeasti ratkaista tehtävää matemaattisilla kaavoilla tai menetelmillä ja saada virheellisen vastauksen, esimerkiksi vastauksen 160 vuotta, vaikka tehtävässä haettiin vastaukseksi ihmisen ikää. Oppilaat eivät siis välttämättä koe luokahuoneen ulkopuolella opittuja tietoja oleellisiksi ratkaisuisaan tai huomioi niitä ollenkaan. Opetuksessa täytyisi siis myös korostaa oman järjen käyttöä, mitä itse asiassa testattiinkin viime lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa

B2-osiossa tehtävässä 12.3, jossa täytyi käyttää maalaisjärkeä.

***Tehtävä 12.3. Erään musiikkikappaleen esittämiseen kuluu 40-henkiseltä kuorolta 7 minuuttia ja 40 sekuntia. Eräessä esityksessä kolme kuoron jäsentä on flunssan takia poissa. Kuinka kauan tämän kappaleen esittämiseen kuluu 37-henkiseltä kuorolta? (2 p.) Hyvän vastauksen piirteistä: Musiikkikappaleen esitysaika ei riipu kuoron koosta (se on verrannollinen kuoron koon nollanteen potenssiin). Aikaa kuluu siten noin 7 minuuttia ja 40 sekuntia. (yle.fi, viitattu 28.11.2019)***

## Kirjallinen kielentäminen

Oppilaan kirjallinen tuotos matematiikassa sisältää usein pelkästään laskuja ja niiden ratkaisuja sekä mahdollisesti sanallisissa tehtävissä vastauksia kokonaisin lausein. Joutsenlahden (2009) mukaan kirjallisessa tuotoksessa olisi tärkeää käyttää symbolikielen lisäksi kuviokieltä, matematiikan luonnollista kieltä ja jopa luonnollista kieltä eikä seurata vain peruskoulun oppikirjan esittämää yhdenlaista ratkaisumallia eli lausekkeen muodostamista ja laskun laskemista. Oppilaan ratkaisusta ei aina näe oppilaan ajatteluprosessia, mikä jättää ratkaisun ymmärtämisen tarkastelijan oman tulkinnan varaan. Matematiikan kielentäminen kirjallisesti voi auttaa painamaan asioita paremmin muistiin, sillä siihen on enemmän aikaa ja kirjoittaminen voi auttaa oppimista sekä kirjoitettuihin asioihin voi aina palata takaisin esimerkiksi kokeeseen valmistautumisessa. Joutsenlahti (2009) kehitti viisi kirjallisen kielentämisen mallia sanallisia tehtäviä varten, joissa ideana on vastata tehtävään kokonaisin lausein. Hänen mukaansa kokonaisin lausein vastaaminen helpottaisi oppilasta miettimään sopivia yksiköitä, näkemään sopiiko vastaus tehtävänantoon sekä arvioimaan onko vastaus järkevä kyseisen tehtävän kuvaamassa tilanteessa.

### Joutsenlahden (2009) kuvaamat mallit:

1. **Standardi -malli:** Symbolikielen käyttöön keskittyvä. Suosii yhdenlaista ratkaisun esitystapaa: lauseke, laskut ja vastaus.
2. **Kertomus -malli:** Ratkaisu kuvataan sanallisesti ja kuvioiden avulla. Ratkaisulla on selkeät vaiheet ja siitä näkee oppilaan ajatteluprosessin.

3. **Kommentti -malli:** Ratkaisussa kirjataan symbolikielen rinnalle perusteluja luonnollisella kielellä. On usein opettajien käytössä ratkaisun esittelyssä oppilaille.
4. **Tiekartta -malli:** Ratkaisu esitetään ensiksi kuvailemalla sanallisesti ja kuvioiden avulla ratkaisuprosessia, jonka jälkeen tehtävä ratkaistaan matemaattisesti standardimallin mukaan.
5. **Päiväkirja -malli:** Ratkaisu keskittyy standardimallin mukaisesti symbolikielen käyttöön. Ongelmakohdissa oppija kirjaa ylös ajatuksiaan tai kuvioita selkeyttäkseen omaa ajatteluaan.

Kirjalliseen kielentämiseen kuuluu myös matemaattisen tekstin ymmärtämistä eli tekstin, kuvaajien ja symbolien ja näiden yhteyden tulkitsemista. Tätä varten täytyy matemaattinen kielellinen syntaksi ymmärtää ja hallita sen käyttö. (Adu-Gyamfi ym. 2010)

### **Maahanmuuttajaoppilaiden ja kaksikielisten oppilaiden kielentämisen haasteet**

Matematiikan kielentäminen ja matematiikan oppiminen hankaloituvat, jos luokkahuoneessa puhuttua yhteistä kieltä on jo alun perin vaikea ymmärtää. Maahanmuuttajaoppilaille jo pelkästään yhteisen kielen ymmärtämiseen kiinnittyy paljon huomiota, minkä vuoksi oppiminen voi kärsiä (Saario 2009, 54). Kieli täytyisi sosiaalisten vuorovaikutustilanteiden avulla sisäistää, jotta se kehittyisi myös ajattelun välineeksi (Vygotsky 1982). Maahanmuuttajaoppilaalla voi mennä pitkäänkin ennen kuin suomen kieli kehittyy ajattelun välineeksi, minkä takia opetusta on luonnollisesti vaikea seurata. Oppilas saattaa joutua jatkuvasti kääntämään suomen kielen omalle äidinkielelleen ymmärtääkseen kuulemansa. Opetuskielen ymmärtämisen tuomat haasteet voivat siis vaikuttaa negatiivisesti muun muassa oppijan keskittymiseen, oppimiseen, vuorovaikutustilanteisiin, omaan identiteettiin ja siten myös yhteisöön kuulumiseen (Adler 2001). Kielen lisäksi voi olla tilanteita, joissa maahanmuuttajaoppilaalle yksinkertaisimmatkin tavallisesti jo opitut matemaattiset sisällöt ovat uusia. On mahdollista, että oppilas ei ole käynyt koulua ennen Suomeen tulemistaan, jolloin oppimiseen vaikuttaa kielen lisäksi aikaisempien tietojen puute. Maahanmuuttajaoppilaat päätyvät todennäköisesti tilanteeseen, jossa heistä on tullut

koulukaksikielisiä eli he käyttävät koulussa eri kieltä kuin kotona. Koulukaksikielisyydessä kielitaito voi olla heikkoa kummankin kielen osalta, jos koulutaustaa ei ole Suomeen muuttaessa. Tällöin oppilaalla ei ole pohjaa, jolle luoda uutta kieltä. Jotkin koulut ovat kuitenkin erikoistuneita vieraskieliseen opetukseen tai käyttävät kielikylpyperiaatetta, jossa opetus saattaa olla oppilaan omalla äidinkielellä tai koulussa käytetyllä toisella kielellä (kuten Helsingin ranskalais-suomalaisessa koulussa). Tuija Rasisen väitöskirjassa (2006) tutkimus osoitti, että kielikylpytilanteissa vieraalla kielellä opiskelun ei pitäisi vaikuttaa negatiivisesti oppilaan yleisiin oppimistuloksiin. Tämän tutkimuksen tulos ei kuitenkaan kerro maahanmuuttajaoppilaiden tilanteesta vaan 'kielikylpy' -koulujen oppilaiden tilanteesta, joille tehdään usein kielitesti, joka määrittää kuka voi opiskella kyseisessä koulussa ja kuka ei. Heillä on tällöin jo jonkinlainen taso kielessä, jota käytetään koulussa toisin kuin monen maahanmuuttajaoppilaan kohdalla.

Kaksikielisyyys voi olla opittua, mutta myös synnynnäistä, jos on sattunut syntymään perheeseen, jossa vanhemmilla on eri kielet äidinkielenään. Lapsi osaa tällöin puhua kahta tai useampaa kieltä tasavertaisesti. Kaksikielinen oppilas törmää usein tilanteisiin, joissa hänen täytyy tehdä valintoja ja tulkita matematiikkaa käyttäen eri kieliä, mikä voi tehdä oppimisesta hankalaa (Adler 2001). Kaksikieliset oppijat oppivat ymmärtämään kielen järjestelmiä helpommin kuin yksikieliset ja siten myös oppivat niitä helpommin (Cummins 1984). Kielet voivat kuitenkin myös sekoittua keskenään kaksikielisen päässä (Lehtinen 2002, 28). Kaksikieliset saattavat siis samaan aikaan ajatella ja kommunikoida eri kielillä. Asiaan perehtyivät Planas ja Setati (2009), jotka totesivat, että kaksikieliset oppilaat ajattelivat omalla äidinkielellään matematiikan tehtävien ratkaisuja, mutta usein tuottivat ja selittivät ratkaisunsa opetuskielellä. Oppilaat saattoivat vaihdella kieliä sen mukaan, millä kielellä he asiat olivat oppineet.

PISA-tutkimuksista voidaan seurata maahanmuuttajaoppilaiden suoriutumista matematiikassa. Alemmille suoritustasoille sijoittui paljon maahanmuuttajia. Tasolla yksi heitä oli 26,2 % ja tasolla kaksi 22,2 %. Osaamistaso on kuitenkin noussut, mutta korkeintaan tyydyttävälle suoritustasolle. Tutkimus osoittaa, että ne maahanmuuttajaoppilaat, jotka ovat tulleet nuorempana Suomeen tai aloittaneet nuorempana suomen kielen oppimisen saavuttavat todennäköisemmin hyvän tuloksen. Myös Virosta tulleiden maahanmuutta-

jien määrän nousu on vaikuttanut tuloksiin positiivisesti. (Harju-Luukkainen ym. 2014.) Oletan, että tämä voi johtua siitä, että viron kieli muistuttaa jonkin verran suomen kieltä. Virolaisille suomen kielen omaksuminen tai ymmärtäminen olisi tämän vuoksi ehkä helpompaa kuin muille maahanmuuttajille. Voidaan kuitenkin todeta, että kielitaidolla on siis suuri vaikutus matematiikan oppimiseen.

## 4.2 Eri kielten vaikutus matematiikan oppimiseen

Maailmassa on paljon eroja matematiikan osaamisen kannalta. Erot voivat johtua esimerkiksi kielestä, kulttuurisista eroista tai taloudellisista syistä. Maailmanlaajuisten vuoden 2015 PISA-tutkimustulosten mukaan Singapore on johtava matematiikkamaa. Kiinan 15-vuotiaat oppilaat sijoittuivat kymmenen parhaan joukkoon ja Suomi oli 12. sijalla. Ranskan, Iso-Britannian ja Yhdysvaltain oppilaat olivat keskitasolla maailmanlistoilla.

Tarkastelen seuraavaksi neljän eri kielen lukusanojen näkökulmasta matematiikan oppimista. Kielet ovat suomi, englanti, kiina ja ranska. Keskityn lopulta kuitenkin eniten suomen ja ranskan kieleen, sillä itsellenikin on niistä kokemusta oppijana sekä opettajana.

### 4.2.1 Lukusanat

Maailman yleisin lukujärjestelmä on siis kymmenjärjestelmä. Oppilaille opetetaan jo esikoulussa laskemaan kymmeneen omien sormien avulla. Luvut yhdestä kymmeneen ovatkin tärkeimmät luvut kaikissa kielissä.

Mononen (2015) käsittelee kielten lukusanojen merkitystä matematiikan oppimisen kannalta. Aasialaiset kielet ovat yhteydessä menestysekkäämpiin matemaattisiin taitoihin. Syy voi olla kielen lukusanoissa. Aasialaisissa kielissä tarvitaan vain yhtätoista lyhyttä sanaa muodostamaan luvut yhdestä sataan, kun taas Suomessa ja Englannissa sanat ovat pidempiä ja niitä tarvitaan peräti 28. Selkeämmän rakenteen takia aasialaisilla on helpompi sanoa lukusanoja lukujonoissa ja heidän on ylipäätään helpompi puhua luvuista.

Suomen kielessä luvun kymmenen jälkeen lähes kaikki luvut koostuvat näistä ensimmäisistä luvuista. Luvut 20-99 muodostuvat selkeästi kymmenyksistä ja yksiköistä, mutta

lukujen 11-19 välillä lisätään sana 'toista' luvun perään. Tässä ilmeneekin Monosen (2015) mukaan oppimisvaikeuksia lapsilla, sillä lukusanojen rakenteellinen järjestys ei ole looginen. Esimerkiksi luku kaksitoista kirjoitetaan siten, että ensiksi tulee luku yksi ja sitten kaksi (12). Mutta kuitenkin sanotaan ensiksi jälkimmäinen luku ja sitten vasta kymmenystä ilmaiseva sana 'toista'. Englannin kielessä esiintyy sama ilmiö lukujen 13-19 välillä. Tämän lisäksi on vielä erikseen se epäjohdonmukaisuus, että sana *ten* (kymmenen) eroaa muista kymmenyksistä, jotka loppuvat kaikki päätteeseen *-ty* ja vielä sekin, että lukusanat eleven (11) ja twelve (12) ovat kokonaan omanlaisia sanoja.

Ranskan kieli on sitten aivan omaa laatuaan. Usein kuuleekin, että ranskan kieli on haastava kieli. On kuitenkin kummallista, miten ranskan kielen lukusanat ovat muodostuneet sellaisiksi mitä ovatkaan. Ne sisältävät paljon erilaisia sääntöjä, joita ranskalaisetkin kritisoivat. Ranskan lukujärjestelmäksi on todettu kymmenjärjestelmä, vaikka siinä on selkeästi jäänteitä vigesimaalijärjestelmästä. Tämä näkyy muun muassa luvussa 80, joka sanotaan *quatre-vingts* eli neljä kaksikymmentä. Luvussa itsessään on jo matematiikkaa eli tässä esimerkissä kertolasku. Toinen esimerkki on luku 70, joka sanotaan *soixante-dix* eli kuusikymmentä kymmenen, joka sisältää yhteenlaskun. Vaikeimmat luvut ovat luvut 90-99. Pelkästään luku 90 sanotaan niinkin vaikeasti kuin neljä kaksikymmentä kymmenen, mikä tarkoittaa sitä, että yhdessä luvussa onkin kaksi eri laskutoimitusta. Sitten onkin luvun 91 vuoro, joka sanotaan neljä kaksikymmentä yksitoista ja sama kaava pätee seuraaviin lukuihin sataan asti.

Nämä lukusanat tuntuvat aikuisiälläkin turhan monimutkaisilta. Asia ei ole yhtään helpompi pienelle esikoululaiselle, jonka täytyy muutenkin oppia lukemaan ja kirjoittamaan. Tässä on kyse alun perin ulkoa opettelusta ja myöhemmin, jos ei muista näitä sanoja ei myöskään pysty helposti laskemaankaan.

PISA-tutkimukset vahvistavat tätä maiden välistä matemaattisten taitojen eroa ja siihen voi olla yhtenä syynä tämä kieli-ilmiö. Voiko kuitenkin esimerkiksi juuri ranskan kielen lukusanat johdattaa joitakin oppilaita ajattelemaan asioita monipuolisemmin tai voiko osalle lapsista kehittyä vaikeiden lukusanojen takia varhaista erikoista matemaattista älyä?



### 4.2.2 Ranskan ja suomen kieli matematiikan oppimisessa

Monet asiat siis vaikuttavat matematiikan oppimiseen ja yksi tärkeimmistä asioista on opetuskieli. Kielten vaikutusta voidaan korreloida PISA-tutkimusten kanssa, mutta tosiasiassa jokainen kokee omalla tavallaan kielen vaikutuksen omassa oppimisessaan. Joillekin ne vaikeat ranskalaiset lukusanat ovat järkevämpiä kuin suomalaiset ja toisille taas ei. Jotkut oppivat kielen helpommin kuin toiset, vaikka aloittaisivat kuinka myöhään tahansa. On selvää, että oppiminen on helpompaa omalla äidinkielellä, mutta joillakin ei ole sitä mahdollisuutta tai oma äidinkieli on monimutkainen kieli jo valmiiksi. Tarkastelen tässä osassa tutkimusta ranskan ja suomen kieliä, jotka ovat myös omia äidinkieliäni.

Suomen kielessä sanat voivat olla pitkiä ja vaikealukuisia sekä matemaattiset käsitteet vieraita tai harhaanjohtavia. Omienkin henkilökohtaisten ja opetuksessa tapahtuvien kokemusten perusteella suomen kieli voi vaikeuttaa tehtävän ymmärtämistä. Olen viimeisen viiden vuoden aikana geometriaa opettaessani törmännyt toistuvasti samaan suomen kielen haasteisiin liittyvään ilmiöön 6-9. luokkalaisilla lapsilla varsinkin kahden kielen omaavien keskuudessa. He sekoittavat sanan *suorakulmio* sanaan kolmio. Oppilas uskoo, että kyseessä on kolmio, sillä sanan kirjoitusasu *'kulmio'* muistuttaa jo samaa sanaa. Oppilas kuitenkin tietää, että sanassa ei esiinny kolmio-sanaa. Piirrettyäni suorakulmion, oppilas osaa nimetä sen omalla äidinkielellään tai toisella opitulla opetuskielellä, mutta ei suomen kielellä, vaikka geometrisiin kuvioihin olisi jo tutustuttu suomeksi aikaisempina vuosina. Näillä oppilailla (ja usein pelkästään suomea puhuvilla) on myös usein paljon vaikeuksia sanallisten tehtävien kanssa. Matematiikassa sanalliset tehtävät ovat tyypillisesti liian pitkiä, niissä voi olla liikaa vaikeita käsitteitä tai ne ovat oudosti muodostettuja (Abedi & Lord, 2001).

Myös ranskan kielessä esiintyy vaikeita ja pitkiä termejä matematiikassa. Hyvä esimerkki tästä voisi olla termi *coefficient*, joka tarkoittaa suomeksi kerrointa. Jokunen viikko sitten oppilaani arveli, että ranskankielinen sana *multiplicateur* (= kertoja) vastaisi suomenkielistä sanaa *kerroin*. Oikea sana *coefficient* ei ensinnäkään pidä sisällään sellaista ymmärrettävää sanaa, minkä 13-vuotias voisi liittää kertoimen tehtävään ja toiseksi kyseinen sana näyttää vaikealta ja sitä ei ole helppo lausua. Niinpä koko luokka oli samaa

mieltä, että *multiplieur* olisi ollut heille helpompi sanavalinta tässä kohtaa.

Myös virheellisesti puhuttu matematiikan kieli voi jäädä oppilaan mieleen ja vai-  
kuttaa oppimiseen. Matematiikkaa puhuttaessa aivan kummalla kielellä tahansa oppi-  
laat ja jopa opettajatkin saattavat puhua yhtäsuuruudesta virheellisesti sanomalla '*kak-  
si plus kaksi tekee neljä*' ja vastaavasti ranskaksi käytetään myös usein samaa verbiä  
tehdä '*deux plus deux font quatre*'. Tässä ikään kuin ilmaistaan, että yhtäsuuruusmerk-  
ki muuttaisi laskun  $2 + 2$  neljäksi tai vastaus neljä olisi yhteenlaskun seuraus. Asia ei  
kuitenkaan ole näin, vaan nämä kaksi lauseketta  $2 + 2$  ja  $4$  ovat yhtä suuria eli sama-  
narvoisia. Yhtäsuuruudesta puhuttaessa täytyisi siis sanoa: "*kaksi plus kaksi on yhtä  
suuri kuin neljä*" ja ranskaksi: "*deux plus deux égale quatre*". Tämä voi johtaa siihen,  
että oppilaat käyttävät yhtäsuuruusmerkkiä itsekin virheellisesti suullisesti, mutta myös  
kirjallisesti. Esimerkiksi tämän tyyppiseen virheelliseen laskun ratkaisuun voisi törmätä:  
 $2 + (3^2 - 6 : 3) = 3^2 = 9 = 6 : 3 = 2 - 9 = 7 + 2 = 9$ . Tässä on paljon yhtäsuuruus-  
merkkiin sekä vähennyslaskuun liittyviä merkintävirheitä, mutta laskujärjestyssääntöä on  
kuitenkin noudatettu ja vastauskin on oikein. Laskussa näkee, että yhtäsuuruusmerkkiä  
käytetään kuvaamaan seurausta eikä yhtäsuuruutta. On siis tärkeää opettaa heti alkuun,  
mitä yhtäsuuruusmerkki oikeasti tarkoittaa ja kuinka siitä puhutaan ja kuinka sitä käy-  
tetään. Tätä suomalaista yhtäsuuruutta ilmaisemaa versiota *on yhtä suuri kuin* voi olla  
hankala käyttää, sillä neljällä sanalla kuvataan yhtä pientä merkkiä. Kun taas muilla mo-  
nella kielellä, kuten ranskalla ja englannilla käytetään sanaa *égale* tai *equals*, mikä hyvin  
ja ytimekkäästi ilmaisee yhtäsuuruusmerkin tehtävän. Ranskassa on kuitenkin joitakin  
tunnettuja kirjoitelmia, kuten Alphonse Allais'n humoristinen satu *Deux plus deux font  
cinq*, jossa nimenomaan käytetään tehdä -verbiä ilmaisemaan yhtäsuuruutta. Tämä voi  
johtaa siihen, että lapset kuulevat jo pieninä vääriä matemaattisia ilmaisuja ja vaikka  
opettaja opettaisi oikein, vanha opittu ilmaisu voi silti jäädä käyttöön. On myös mah-  
dollista, että omalla kielellään on oppinut ilmaisemaan asioita tietyillä tavoilla ja sitten,  
kun kääntää asiat toiselle kielelle, käyttääkin toisen kielen vastaavaa sanaa kuvaamaan  
samoja tilanteita.

Aikaisemmin tutkimuksessa mainitsin, että ranskankieliset lukusanat voivat olla itses-  
sään jo liian vaikeita seitsenvuotiaalle lapselle. Ne voivat vaikeuttaa laskemista ylipäänsä,

jos itse luvun sanassa on jo lasku. Itse opin laskemaan ranskaksi. En muista oliko minulla ikinä vaikeuksia näiden lukujen kanssa, mutta muistan, milloin oivalsin, että luku 80 tosiaan sisältää ikään kuin kertolaskun itsessään. Sisäistin asian vasta yläkoulussa eli olin sitä ennen vain opetellut ulkoa lukujen sanat miettimättä sen pidemmälle niiden sisältöä. Eräs belgian ranskaa puhuva oppilas kysyi matematiikan tunnilla jokunen viikko sitten, että eikö ranskalaisten olisi järkevämpää käyttää belgialaisten käyttämiä lukusanoja luvuille 70-99, joissa luku 70 sanotaan *septante*, luku 80 sanotaan *huitante* ja luku 90 sanotaan *nonante*. Nämä lukusanat seuraavatkin samaa kaavaa kuin ranskalaiset lukusanat luvuille 30 (*trente*), 40 (*quarante*), 50 (*cinquante*) ja 60 (*soixante*), jotka pitävät sisällään luvut 3, 4, 5 ja 6 sekä loppupääte *-ante*, joka viittaisi kymmenyksiin. Vastasinkin oppilaani kysymykseen myönteisesti, sillä mielestäni nämä sanat edustavat paremmin ja selkeämmin kyseisiä lukuja, mikä voisi myös auttaa laskemisessa.

Kahta kieltä käyttävät koulut voivat törmätä myös sellaiseen ilmiöön, että oppilaat eivät haluaisi opiskella kummallakin kielellä, mikä voi vaikuttaa oppilaan opiskelumotiivaatioon. Joidenkin oppilaiden vanhemmat ovat laittaneet lapsensa tämänkaltaiseen kouluun, jotta he oppisivat puhumaan toista kieltä sujuvasti. Tämä on lapsen tulevaisuudessa suuri etu, mutta opiskeluvaiheessa se saattaa olla suuri taakka opetella asioita kahdella eri kielellä. Itse olen huomannut kaksikielisessä koulussa työskennelleenä, että eniten tästä valittavat yläkoululaiset. Teini-ikä ja kaiken kyseenalaistaminen tuo myös kysymyksiä: "Mihin tätä tarvitaan? Miksi meidän täytyy kahdella kielellä opetella asiat, joita muut opettelevat vain yhdellä? Miksi joudun tekemään enemmän töitä kuin muut?". Tässä koulussa osa näistä oppilaista puhuu paremmin suomea ja toivoisivat, että opetus olisi pelkästään suomeksi, kun taas toinen osa puhuu paremmin ranskaa ja kokevat suomenkielisen opetuksen haasteelliseksi. En itse pakota oppilaitani vastaamaan minulle tietyllä kielellä yläkoulun puolella, vaan oppilaat saavat valita vastaavatko minulle suomeksi tai ranskaksi. Suomenkielisten ja ranskankielisten opettajien kanssa heillä ei ole valinnanvaraa, mutta itse ymmärrän kumpaakin kieltä, joten otin tällaisen käytännön käyttöön. Oppilaiden täytyy kuitenkin keskittyä omavalintaisen puhutun kielen oikeanlaiseen matematiikan kielentämiseen.

Ranskan ja suomen kielten erona opetuskielenä on se, että ranskan kieli muistuttaa

paljolti englantia. Ranskan uudet opitut matemaattiset termit voivat olla ranskaa puhuville suomalaisillekin tutumpia tai järkevämpiä kuin vastaavat suomalaiset termit, sillä ne ovat voineet tulla vastaan englannin kielessä. On myös tilanteita, joissa englannin kielen sanoista on jäänyt sanojen ensimmäinen kirjain ilmaisemaan lyhyemmin joitakin matemaattisia asioita, etenkin geometriassa, esimerkiksi aikaisemmin mainitsemani ympyrän säde  $r$  eli *radius*.

Oma ranskan kielen osaamistaso myös vaikuttaa matematiikan oppimiseen ranskaksi aivan kuten suomen kielen tasokin. On aivan eri tilanne oppia matematiikkaa ranskaksi, jos henkilö on vasta hiljattain alkanut opetella ranskaa kuin jos on opetellut ranskaa jo monen vuoden ajan. Ranskalaisten lukusanojen oppiminen aikuisiällä voi olla hämmentävämpää kuin pienenä lapsena, sillä aikuisiällä uuden kielen oppimisessa käytetään pohjana omaa äidinkieltä. Aikuiset kuitenkin hahmottavat helpommin kielen rakenteen. Uuden kielen oppimisessa silloin verrataan uutta sanastoa tai kielelle ominaisia kielioppisääntöjä omaan äidinkieleen. Aikuisten matemaattiset taidot ovat tietenkin parempia kuin ensimmäistä luokkaa käyvällä lapsella. Aikuinen siis ymmärtää heti, että ranskan lukuun 80 sisältyy kertolasku, mikä voi olla samalla hyvin loogista, mutta myös todella hämmentävää.

## Luku 5

### Pohdinta

Tutkielmassa oletettiin heti alussa, että kielellä on vaikutus matematiikan oppimiseen. Oletus sai alkunsa omista henkilökohtaisista kokemuksistani sekä tutkielmaa varten etsityistä taustatiedoista. Kantalukujärjestelmistä ei ollut selkeää hypoteesia, sillä pelkästään niihin perehtyminen oli jo haasteellista. Uskoin kuitenkin, että kantalukujärjestelmiä olisi kiinnostavaa liittää opetukseen, sillä ne voivat olla todella kiinnostavia ja ne voivat helpottaa asioiden sisäistämisessä. Tutkielma perustuu siis paljon taustatietoihin ja teoriaan, joihin olen liittänyt omia kokemuksia tai näkemyksiä. Tutkielma ei sinänsä tuo mitään merkittäviä uusia tuloksia, sillä se keskittyi paljolti jo olemassa olevaan tietoon. Itselleni tästä jäi ikään kuin tulokseksi ajatus siitä, että kaksi- ja monikieliset tarvitsevat todellakin paljon tukea, jota pitäisi toteuttaa testaamalla erilaisia opetus- ja oppimismenetelmiä sekä etsimällä oppijan motivaation lähdeksi. Kantalukujärjestelmistä ei oikeastaan löytynyt sellaisia tutkimuksia, jotka liittyisivät niiden opettamiseen. Niiden tuomista opetukseen ei siis ole testattu vaikuttavan asioiden muistamisessa tai ymmärryksen syventämisessä. Matemaattista intuitiotakaan ei ole paljon tutkittu opetuksen näkökulmasta, niihin liittyvät aivotutkimukset ovat vielä melko tuoreita ja intuition harjoittamista ei ole testattu lähes lainkaan. Ei siis ole tuloksia, jotka näyttäisivät kuinka matemaattista intuitiota ja kantalukujärjestelmiä harjoittavat tehtävät voisivat vaikuttaa matematiikan oppimiseen. Aihe on kuitenkin todella mielenkiintoinen ja olisi kiinnostavaa löytää jokin tapa testata sitä oppilailla ja katsoa löytyykö oppimisvaikeuksia omaavilta oppilailta samankaltaisia

piirteitä heidän intuitioistaan.

Tutkielman teoriasisältöjä voidaan pitää luotettavana, sillä ne ovat suurimmaksi osaksi tunnettujen ammattitieteilijöiden käsialaa, etenkin kieliin ja kielentämiseen liittyvissä konteksteissa. Lähteisiin on myös viitattu useasti muissa samoihin aiheisiin liittyvissä tutkimuksissa ja teksteissä. Omien näkemysteni sisältö ei ole yhtä luotettavaa, sillä ne perustuvat yhden henkilön kokemuksiin. Olen ikään kuin koehenkilönä omassa tutkimuksessa-ni. Näitä kokemuksia kuitenkin tukevat luotettavista lähteistä peräisin olevat tutkielman taustatiedot. Kantalukujärjestelmien opetukseen ja matemaattiseen intuitioon liittyvät ajatukset ovat vähiten perusteltuja muiden lähteiden avulla ja siten vähemmän luotettavia. Näihin liittyvien taustatietojen lähteet voivat myös olla jokseenkin kyseenalaisia. Kantalukujärjestelmiin liittyvät historialliset löydökset (esim. papyrukset ja seinämaalaukset) ovat jo monta tuhatta vuotta vanhoja ja niiden tulkitsemiseen luotetaan asialla oleviin tutkijoihin ja tieteilijöihin. Intuitioon liittyvät taustatiedot tässä tutkielmassa ovat peräisin vain yhden aivotutkijan tutkimuksista. Aiheesta olisi hyvä olla lisää tuloksia tukemaan muilta tahoilta esitettyjä tietoja.

Tutkielman tutkimusmenetelmä perustuu paljolti havainnointiin ja havaintojen analysointiin. Havainnot ovat peräisin omista kokemuksista, joita tukevat erilaiset muut tutkimukset ja julkaistut tekstit. Tutkielmani seuraa enemmän kvalitatiivisten kuin kvantitatiivisten menetelmien piirteitä, sillä tässä tutkitaan laadullisesti tiettyä ilmiötä ja yksilön tai yksilöiden kokemuksia. Tutkielmaan olisi voinut sopia jokin kysely tai haastattelu kaksikielisessä koulussa, esimerkiksi oppilaiden ajattelua ohjaavista kielistä tai heidän mieliteistään kahden kielen opetuksesta. Tämä ajatus tuli kuitenkin vasta todella myöhään tutkielman edetessä ja lopulta pitäydyin alkuperäisessä suunnitelmassa.

Tutkielmassa keskitytään ehkä hiukan liikaa jo olemassa olevaan tietoon. Olisin ehkä voinut jättää kantalukujärjestelmiin liittyvän osuuden lyhyemmäksi tai kokonaan pois ja keskittyä pelkästään kielen vaikutukseen matematiikan oppimiseen. Koin kuitenkin, että kantalukujärjestelmät ovat suuri osa matematiikan kielen alkuperää ja itsessään hyvin mielenkiintoinen aihe, johon itse halusin syventyä ja toivoisin muidenkin syventyvän. Tutkielman edetessä oli yllättävää ja helpottavaakin huomata millaisia tutkimuksia on samoista aiheista tehty ja kuinka ne varmistavat omia kokemuksiani. Tutkielman laatimisen

aikana olen kiinnittänyt opetukseni aikana huomiota asioihin, joita olen tässä tutkinut. Esimerkkinä eräs oppilaani kertoi, että ei pidä ranskankielisistä matematiikan tunteista, koska hän ei ymmärrä mitään. Mutta seuraavalla tunnilla sama oppilas toivoi, että geometriaa opetettaisiin ranskaksi, sillä hän ei ole ikinä suomeksi sitä opiskellut. Kaksikielisen oppilaan asenne matematiikkaan riippuu tässä esimerkissä opetuskielestä.

Tutkielmassa tutkittuja asioita ja tuloksia ei voi täysin yleistää kaikkien kohdalla. Kantalukujärjestelmät eivät välttämättä tuo mitään lisäarvoa sellaisille oppilaille, jotka mahdollisesti vain menisivät sekaisin ylimääräisestä jopa vaikean puoleisesta tiedosta. Kielten merkitys ei ole myöskään kaikkien oppilaiden kohdalla samanlainen. Osa ei koe kieltä ja kielentämistä vaikeana, vaikka olisikin monikielinen. Useimmiten monikielisten keskuudessa kieli ja kielentäminen kuitenkin koetaan haasteena, jos opetuskielen ymmärtäminen on heikkoa. Jotkut voivat siis oppia uuden kielen tuosta vain, kun taas joillekin oma äidinkieli on jo hankala. Oppijoilla voi myös olla matemaattisten asioiden ymmärtäminen eritasoista. Toiset ymmärtävät ja sisäistävät matematiikkaa helpommin kuin toiset riippumatta kielellisistä haasteista. Näitä ei voi yleistää myöskään muissa maissa opiskelevien kohdalla, sillä heidän opetuskielensä on eri kuin Suomessa ja kulttuurikin on täysin erilainen. Suomen kieli on ulkomaalaisille vaikea kieli, sillä se ei muistuta muita kieliä (paitsi viroa) ja siihen liittyy ominaisuuksia, joita ei tyypillisesti muista kielistä löydy, kuten esimerkiksi sijamuodot. Opettajatkin ja heidän toimintatapansa ovat erilaisia jo Suomessa, mutta myös eri puolilla maailmaa. Jotkut voivat esimerkiksi huomioida paljonkin oppilaiden kielentämiseen ja vuorovaikutustaitoihin liittyviä seikkoja, kun taas toiset voivat enemmän keskittyä matemaattisten asiasisältöjen opetukseen tai täysin opettajajohtoiseen opetustapaan. Eri maiden opetuskulttuuri ja -menetelmät voivat myös vaikuttaa tutkimustulosten yleistettävyyteen.

Tutkimusta voisi jatkaa keräämällä lisää aineistoa monikielisistä oppilaista ja heidän tuntemuksistaan matematiikan oppitunneilla. Lukusanoista ja niiden merkityksestä oppimiseen voisi saada lisää tuloksia testaamalla näitä monikielisten oppilaiden ajatusmaailmaa. Suomen ja ranskan kielen eroihin voisi perehtyä Suomen ranskalais-suomalaisissa kouluissa tarkemmin. Miksei voisi jopa muihinkin kieliin perehtyä muissa kaksikielisissä kouluissa. Myös muiden maiden kouluissa vieraileminen ja tutkimusten teettäminen voisi

tuoda lisäarvoa aiheen tutkimiselle ja lisätä tuloksia oppilaiden sekä opettajien näkökulmista kieleen ja kielentämiseen. Olisi kiinnostavaa tietää, miten muissa maissa lähestytään opetuskieleen ja kielentämiseen liittyviä ongelmia sekä itse maassa käytetyn opetuskielen vaikeudesta verrattuna suomen kieleen. Muiden maiden kouluissa on myös erilaisia käytäntöjä, kulttuureja, opetustapoja, asiasisältöjen esittämistapoja ja -tekniikoita sekä erilainen opetussuunnitelma, jotka voisivat lopulta vaikuttaa oppilaiden oppimiskokemuksiin. Ranskassa on esimerkiksi käytössä erilainen arvosanajärjestelmä ja erilaiset ylioppilaskokeet kuin Suomessa. Esimerkiksi Ranskan ylioppilaskokeissa on täytynyt ensinnäkin kirjoittaa lähes kaikki aineet riippuen minkä tieteenalaan on valinnut ja toiseksi kaikkien aineiden keskiarvon pitää olla yli 10/20, jotta pääsee ylioppilaaksi. Tämä tarkoittaa sitä, että abiturientti on saanut Ranskassa ikään kuin reputtaa jonkin aineen, jos taas loistaa toisessa aineessa ja silti päästä ylioppilaaksi. Toinen ylioppilaskokeissa merkittävä seikka on se, että kaikki aineet kirjoitetaan samalla viikolla ja kielissä on suullinen koekin, mitkä voivat aiheuttaa oppilaille paljon stressiä ja lopulta sekaannusta. Ranskassa on kuitenkin päätetty muuttaa ylioppilaskirjoitusten toimintatapaa ja muutos on juuri otettu käyttöön. Nykyinen käytäntö muistuttaa enemmän Suomen ylioppilaskirjoituksia. Näihin asioihin voisi myös perehtyä lisää ja tutkia vaikuttaako arvosanajärjestelmä sekä toimintatavat oppilaiden motivaatioon, asenteisiin, oppimiseen ja lopulta suoriutumiseen.



# Luku 6

## Johtopäätökset

Tämän tutkielman tarkoituksena oli löytää miten kantalukujärjestelmiä voisi sisällyttää matematiikan opetukseen sekä tarkastella eri kielten merkityksiä matematiikan oppimisessa. Tutkielma toteutettiin perehtymällä ihmisen matemaattiseen intuitioon, kantalukujärjestelmiin ja niiden ominaisuuksiin, oppimisen moneen ulottuvuuteen sekä kielten vaikutukseen erilaisten oppijoiden kohdalla matematiikan opetuksessa. Tutkimuksen johtopäätöksenä voidaan todeta, että jokaiselta henkilöltä löytyy kyky oppia matematiikkaa, mutta kielellä on suuri vaikutus oppimisen laatuun ja oppimistuloksiin. Seuraavaksi käsitellään tutkielman johtopäätöksiä asetettujen tutkimuskysymysten avulla.

### 6.1 Matemaattisen intuition merkitys

Tutkielman ensimmäinen kysymys käsitteli matemaattista intuitiota ja sen tuomista enemmän esille oppitunnilla. Matemaattinen intuitio ikään kuin koko ajan toimii taustalla, kun oppilaat tekevät tehtäviä. Sen harjoittaminen voisi olla hyväksi mielikuvitukselle ja loogista päättelyä vaativissa tehtävissä. Matemaattista intuitiota voisi tosiaan harjoittaa, mutta se voi vaikuttaa myös negatiivisesti oppimiseen. Oppijat voisivat päätyä kehittämään omia sääntöjä entistä helpommin, jos heitä ikään kuin kannustettaisiin siihen. En siis henkilökohtaisesti suosittelisi matemaattisen intuition harjoittamista opetuksessa etenkin uusien asioiden opetuksen yhteydessä.

## 6.2 Kantalukujärjestelmien merkitys opetuksessa ja kielissä

Toinen tutkielman kysymys käsitteli kantalukujärjestelmien merkitystä matematiikan opetuksessa ja niiden yhteyttä nykyisiin kieliin. Kantalukujärjestelmiä voisi hyvinkin sisällyttää opetukseen ja siten avartaa oppilaiden näkemystä luvuista. On kuitenkin vaikeaa sisällyttää kantalukujärjestelmiä omana opetettavana aiheena kokonaan kerrallaan, sillä oppitunteja on rajallinen määrä ja varsinaiset opetettavat asiat täytyisi ehtiä käymään läpi. On kuitenkin mahdollista mainita joistakin kantalukujärjestelmistä tiettyjen aiheiden yhteydessä tai mahdollisesti antaa lisätehtäviä aiheesta oppilaille, jotka ovat saaneet annetut tehtävät tai kokeen tehtyä nopeasti. On myös sellaisia oppilaita, jotka ovat matematiikasta hyvin kiinnostuneita tai matemaattisesti lahjakkaita, ja joille voisi jakaa näitä tietoja tehtävien kautta tai kertomalla joitakin aiheeseen liittyviä hyviä kirjoja, artikkeleita tai internetsivuja.

Kantalukujärjestelmät näkyvät vain vähän kielissä. Eri kielillä on joitakin sanoja, jotka ovat peräisin joistakin kantalukujärjestelmistä. Esimerkiksi duodesimaalijärjestelmästä on peräisin suomalainen sana tusina ja englanniksi sama sana dozen. Englannin kielessä luvuille 0-12 on olemassa omat lukusanat, mikä myös johtuu duodesimaalijärjestelmästä. Myös vigesimaalijärjestelmästä on esimerkiksi ranskan kielessä jäänteitä luvuissa 80-99. On varmasti muitakin kieliä, joissa näkyy piirteitä kantalukujärjestelmistä, mutta en ole niitä sisällyttänyt tutkielmaan. Voidaan myös ajatella, että binääri-, oktaali- ja heksadesimaalijärjestelmät ovat vaikuttaneet elektronisesti käytettävään kieleen tai tapaan puhua elektronisten laitteiden toiminnoista. Muuten kantalukujärjestelmät ovat vaikuttaneet eniten matematiikan kieleen tuomalla tälle symboleja, kuvia, erilaisia merkintätapoja samoille asioille ja sääntöjä, joiden mukaan laskuja voidaan ratkaista. Kantalukujärjestelmät vaikuttavat siis opetuskieleen, sillä niitä esiintyy monessa matematiikan aihealueessa, joista oppitunneilla täytyy puhua. Kantalukujärjestelmät vaikuttavat siten myös kielen-tämiseen.

## 6.3 Kielten vaikutus matematiikan oppimisessa; haasteet kielentämisen ja opetuskielen kanssa

Viimeisessä tutkimuskysymyksessä oli tarkoitus selvittää, minkälainen vaikutus eri kielillä on matematiikan oppimiseen ja kuinka sellainen oppija, jolla on haasteita opetuskielen kanssa voi selviytyä matematiikan opiskelusta. Tutkielman edetessä selvisi, että matematiikan oppimiseen vaikuttaa kielen lisäksi moni muukin tekijä, mutta erilaisten tutkimustulosten perusteella kielen rooli on todella tärkeässä asemassa. Kieliä on parhaillaan jo kaksi matematiikan oppitunneilla; matematiikan kieli sekä opetuskieli. Matemaattisten sisältöjen lisäksi täytyy periaatteessa oppia myös uusi kieli ja samalla myös käsitellä opetuskieltä, joka saattaa olla joillekin itsestään selvää, mutta toisille jo itsessään hyvin vaikeaa.

### 6.3.1 Haasteet kielen kanssa

Tutkielmassa selvisi, että haasteita voi olla paljonkin matematiikan kielen ja opetuskielen käsittelemisessä. Maahanmuuttajaoppilas, kaksi- tai monikielinen oppilas voi joutua ahdinkoon jo luonnollisella kielellä kommunikoinnin kanssa. Tämän lisäksi oppilaan oma tausta perheineen ja kulttuureineen sekä oma persoona vaikuttavat tapaan toimia opetustilanteessa. Pahimmassa tilanteessa voisi olla sellainen maahanmuuttajaoppilas, joka ei ole ennen muuttoa Suomeen ikinä käynyt koulua eli ei ole minkäänlaista pohjaosaamista tai tiedä lainkaan millaista on opiskella tai tunne koulun normeja, ei osaa puhua tai ymmärrä yhteistä opetuskieltä, ei saa kotonakaan apua opiskelun kanssa, ei saa luokkatovereiltakaan apua puutteellisen yhteisen kielen vuoksi ja tuntee pelkoa ylipäänsä puhua ihmisille tai sanovansa jotakin väärin. Mitä vanhempi kyseinen maahanmuuttajaoppilas on, sitä vaikeammassa tilanteessa hän on. Tämänkaltaisille ehkä vähemmän kärjistetyille tilanteille täytyy löytyä ratkaisuja ja tukea jo koko koulun puolesta, mutta myös jokaiselta oppilasta opettavalta opettajalta. Suomessa on onneksi erityisopettajia sekä mahdollisesti tulkkeja, jotka voivat auttaa näissä tilanteissa, mutta oppilaan täytyisi myös päästä kokonaisen luokan kanssa oppitunneille, jotta saisi yhteenkuuluvuuden tunnetta, maise-

manvaihtoja, haastetta sekä muitakin kavereita kuin erityisopetuksessa olevia.

Kielentämisen hyödyt ovat selkeitä. Kun kielentäminen onnistuu, oppilas pystyy puhumaan matematiikan kieltä, oppii Joutsenlahden (2003a) mukaan paremmin matematiikkaa ja mitä luultavimmin kokee kuuluvansa matematiikkaa osaavien piiriin. Kun oppilas, jolla on haasteita kielentämisen ja ylipäänsä yhteisen kielen kanssa pääsee eteenpäin opiskelussaan ja kokee oppivansa matematiikkaa, hän saa varmasti paljon onnistumisen sekä yhteenkuuluvuuden tunteita. Lapsilla on tarve kuulua johonkin ryhmään ja tarve onnistua. Matematiikan suullinen kielentäminen kehittää etenkin monikielisten keskuudessa sekä suomen kielen taitoa että matematiikan oppimista. Kaikkien oppilaiden matematiikan oppimista voisi vahvistaa kehottamalla heitä kielentämään suullisesti matematiikkaa myös silloin, kun he tekevät itsenäisesti yksin tehtäviä. Tämä auttaisi heitä lisäämään tietoisuutta omasta osaamisestaan, jolloin myös matematiikan osaaminen kehittyy (Lee 2006). Kielentäminen suullisesti koko luokan kanssa tai etenkin pienissä ryhmissä auttaa löytämään uusia keinoja ratkaista matematiikan tehtäviä, sillä omia strategioita voi silloin verrata muiden strategioihin (Joutsenlahti 2003a).

# Kirjallisuutta

- [1] Abedi, J., & Lord, C. (2001). *The language factor in mathematics tests*. Applied Measurement in Education, 14(3), 219-234.
- [2] Adler, J.B. (2001). *Teaching Mathematics in Multilingual Classrooms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [3] Adu-Gyamfi, K., Bosse, M.J. & Faulconer, J.(2010). *Assessing Understanding Through Reading and Writing in Mathematics*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning.
- [4] Ahtola, A. (toim.) (2016). *Psyykinen hyvinvointi ja oppiminen. PS-kustannus*, e-kirja.
- [5] Boyer, Carl B.(1991). *A History of Mathematics*. Princeton University Press 1985. (Suom. Pietiläinen, K. *Tieteen kuningatar*).
- [6] Burton, L. (1984). *Mathematical thinking: The struggle for meaning*. Journal for research for mathematics education. Volume 15. Number 1. National Council of Teachers of Mathematics.
- [7] Cauty, A. & Hoppan, J., *Les Écritures mayas du Nombre*.  
<http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/pdf/Cauty-Hoppan-2.pdf>
- [8] Chrisomalis, S. (2010), *Numerical Notation: A Comparative History*, Cambridge University Press.
- [9] Cummins, J. (1984). *Bilingual Education and Special Education: Issues in Assessment and Pedagogy*. San Diego: College Hill.

- [10] Dehaene, S. (2009). *Origins of Mathematical Intuitions*.
- [11] Dervin, F. (2016). *Interculturality in Education: A Theoretical and Methodological Toolbox*. London: Macmillan Publishers Ltd, 74–55.
- [12] Gardner, R.C. (1985). *Social psychology and second language learning. The role of attitudes and motivation*. London: Edward Arnold.
- [13] GeoGebra 5 -piirtoalusta
- [14] Haapasalo, L. (2004). *Interplay between conceptual and procedural knowledge by making formal and informal mathematics*. Teoksessa, A. Laine, J. Lavonen V. Meisalo (toim.) Current research on mathematics and science education. Helsinki: Yliopistopaino, 123-140.
- [15] Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*. Joensuu: MEDUSA Software
- [16] Halinen, I., Hotulainen, R., Kauppinen, E., Nilivaara, P., Raami, A. & Vainikainen M-P. (2016). *Ajattelun taidot ja oppiminen*. Jyväskylä: PS-Kustannus.
- [17] Harju-Luukkainen, H. Nissinen, K. Sulkunen, S. Suni, M Vettenranta, J. (2014). *Avaimet osaamiseen ja tulevaisuuteen. Selvitys maahanmuuttajataustaisten nuorten osaamisesta ja siihen liittyvistä taustatekijöistä PISA 2012 -tutkimuksessa*. Jyväskylä, Jyväskylän yliopistopaino.
- [18] Ilves, M. (2005). *ääneenajattelu*. Tietojenkäsittelytieteidenlaitos, 209-222.  
<http://www.cs.uta.fi/usabsem/luvut/14-Ilves.pdf>
- [19] Jaakkola, T, Krause, C. M., Kujala, T., Nyyssölä, K., Sajaniemi, N. & Silveñn, M. (2012) *Aivot, oppimisen valmiudet ja koulunkäynti : neuro- ja kognitiotieteellinen näkökulma*.
- [20] Joutsenlahti, J. (2003a). *Kielentäminen matematiikan opiskelussa*. Teoksessa Virta Arja Mattila Outi Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003). Turun opettajakoulutuslaitos, Turku.

- [21] Joutsenlahti, J. (2009). *Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä*. Teoksessa Kaasila R. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopistopaino, Rovaniemi.
- [22] Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). *Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kiellennettyihin ratkaisuihin*. Teoksessa Ropo, E., Silfverberg, H. Soini, T. Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat: ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopisto, Tampere.
- [23] Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2011). *Matematiikan kielentämisen tutkimuksen lähtökohtia kielen näkökulmasta*.
- [24] Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J. & Harjulehto, P. 2012. *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa*. Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association..
- [25] Kauranen, K. (2011). *Motoriikan säätely ja motorinen oppiminen*. Helsinki: Liikuntatieteellinen seura.
- [26] Klemola, U., & Mäkinen, T. (2014). *Tunne- ja vuorovaikutustaitoja oppii harjoittelemalla : Pedagogisia poimintoja opettajalle*. Liito : Liikunnan ja terveystiedon opettaja, 2014 (4), 32-34.
- [27] Kolehmainen T. (2005). *Roomalaiset numerot substantiiveina*, Kielenhuollon tiedotuslehti.
- [28] Lave, J. (1993). *The practice of learning*. Teoksessa Chaiklin S Lave J (eds) Understanding practice. Perspectives on activity and context (s. 3-32). New York:Cambridge University Press.
- [29] Lee, C. (2006). *Language for Learning Mathematics*. Assessment for Learning in Practice. England: Open University Press.

- [30] Lehtinen M. (2014). *Lukujärjestelmistä*. Matematiikkalehti Solmu, Helsingin yliopisto. <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/1/lukujarjestelmista.pdf>
- [31] Lehtinen, T. (2002). *Oppia kieli kaikki: maahanmuuttajalasten suomen kielen kehitys ja kaksikielisyys peruskoulun ensimmäisellä luokalla*. Väitöskirja. Turun yliopisto.
- [32] Marton F. and Säljö R. (1976) *On qualitative differences in learning*. Io - Outcome and Process' British Journal of Educational Psychology 46, pp. 4-11.
- [33] Mäkinen, P. (2004). Verkko-tutor. Tampereen yliopisto.  
<http://www15.uta.fi/arkisto/verkkotutor/oppija.htm>
- [34] McKirahan, R. D. (2011). *Philosophy before Socrates: An introduction with texts and commentary*. Hackett Publishing.
- [35] Mononen, R. (2015) *Lukusanojen tuottaminen eri kielillä - yhteys matematiikan oppimiseen*, LukiMat-hanke.  
<http://www.lukimat.fi/matematiikka/kirjoituksia/lukusanojen-tuottaminen-eri-kielilla-yhteys-matematiikan-oppimiseen>
- [36] Morgan, C. (2000). *Language in Use in Mathematics Classrooms: Developing Approaches to a Research Domain* Educational Studies in Mathematics 41: 93.  
<https://doi.org/10.1023/A:1003891809328>
- [37] Moschkovich, J. N. (2002). *A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners*, Mathematical Thinking and Learning, Special issue on Diversity, Equity, and Mathematical Learning, N. Nassir and P. Cobb (eds.), 4(2 and 3), 189–212.
- [38] Opetushallitus (2016). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. (2016). Helsinki: Opetushallitus. Viitattu 24.11.2019.
- [39] Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically, communication in mathematics classrooms*. London and New York: Routledge Kegan Paul.



- [40] PISA-tutkimustuloksia.  
<http://factsmaps.com/pisa-worldwide-ranking-average-score-of-math-science-reading/>
- [41] Planas, N. & Setati, M. (2009), *Bilingual Students using their Languages in the Learning of Mathematics*. Mathematics Education Research Journal, 21(3), 36-59.
- [42] Polster B. (2002). *The Mathematics of Juggling*.
- [43] Prashnig, B. (2000). *Erilaisuuden voima. Opetustyylit ja oppiminen*. Opetus 2000. Jyväskylä: PS-kustannus.
- [44] Rauste von Wright, T, von Wright, J. & Soini, T. (2003) *Oppiminen ja koulutus*. WSOY, Helsinki.
- [45] Riordain, M. N., & Mccluskey, A. (2015). *Bilingual mathematics learners, conceptual mathematical activity and the role of their languages. How best to investigate?* In CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1454-1460).
- [46] Saario, J. (2009). *Suomi toisena kielenä -oppilas ja luokkakeskustelun haasteet*. Teoksessa: Kuukka, I. Rapatti, K. (toim.) Yhteistä kieltä luomassa: suomea opetteleva opetusryhmässäni. Helsinki: Opetushallitus.
- [47] Salmela-Aro K. & Aunola, K. (2018). *Motivaatio ja oppiminen*. PS-kustannus e-kirja.
- [48] Sajaniemi, N., Suhonen, E., Nislin, M., & Mäkelä, J. (2015). *Stressin säätely. Kehityksen, vuorovaikutuksen ja oppimisen ydin*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- [49] Silfverberg, H., Portaankorva-Koivisto, P. & Yrjänäinen, S. (2005). *Matematiikka kielenä ja kielikasvatuksena*.
- [50] Kuva, yhteishyva.fi.  
<https://yhteishyva.fi/osallistu/aivojumppa-tehtavat-ja-ratkaisut/article-989324>, Viitattu 1.11.2019.

- [51] Ylioppilaskokeet, yle.fi  
*<https://yle.fi/aihe/artikkeli/2019/09/02/2019-syksy-matematiikka-lyhyt-oppimaara>*
- [52] Vygotsky, L.S. (1982). *Ajattelu ja kieli*. (suom. Helkama, K. Koski-Jännes, A. venäjänkielisestä alkuperäisteoksesta vuodelta 1931). Espoo: Weilin+Gröös
- [53] Tynjälä, P. (1999). *Oppiminen tiedon rakentamisena: konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- [54] Wikipedia.org.  
*<https://en.wikipedia.org/wiki/Vigesimal>*  
Kuvia: *[https://fi.wikipedia.org/wiki/Mayojen\\_numerot](https://fi.wikipedia.org/wiki/Mayojen_numerot)*  
*[https://fi.wikipedia.org/wiki/Babylonialaiset\\_numerot](https://fi.wikipedia.org/wiki/Babylonialaiset_numerot)*